EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

EXAMENNUMMER 2016

Besprekingen van een aantal examens door docenten

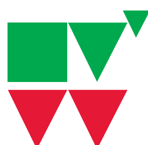
Hoe komt een examenopgave tot stand?

Wiskundig modelleren in schoolboeken

Jaarvergadering en studiedag NVvW 2016

JAARGANG 92 - SEPTEMBER 2016

NR.1



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 92 NR 1

IN DIT NUMMER

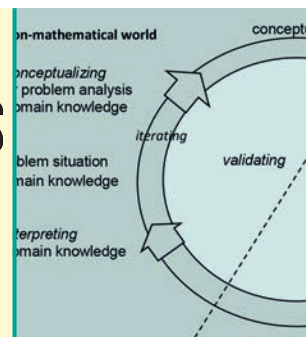
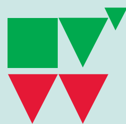


Foto: Tom Goris

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN



Kort vooraf

Op dit moment bent u alweer druk aan de slag. ...Maar met deze *Euclides* zult u zich ongetwijfeld de dagen herinneren van vlak vóór de vakantie: de examentijd. Dit examennummer is iets anders van opzet dan u gewend bent. Geen lange objectieve analyse van álle examens door de medewerkers van het Cito, daarvoor verwijzen we naar de website van het Cito. Wél twee bijdragen over het construeren van de examens. En een zevental recensies van docenten wiens leerlingen deze examens gemaakt hebben. Mooie, persoonlijke, verre van objectieve bespiegelingen. Door al deze auteurs geschreven in een zeer korte tijd, want de deadline was slechts vier weken na de dag van het examen.
Geel en aqua zijn de steunkleuren van deze 92e jaargang. Het lijkt ons een aardig idee om voor de derde keer, na Rinus Roelofs en Santiago Calatrava, een thema te kiezen voor de omslag-foto's: natuurlijke patronen. Met wederom het verzoek aan u om foto's met dat thema op te sturen. Dus als u zo'n pareltje heeft en die foto op de omslag van uw lijfblad wilt zien: stuur hem naar de redactie.
De redactie zoekt versterking overigens. We zijn met name op zoek naar iemand die het vmbo van binnen en van buiten kent om ervoor te zorgen dat onze grootste tak van sport binnen het onderwijs meer aandacht gaat krijgen in dit blad. Interesse? Laat het weten...
Ten slotte wil ik Liesbeth Coffeng, de nieuwe eindredacteur van *Euclides*, van harte welkom heten. We gaan er een frisse en inspirerende 92e jaargang van maken!

Tom Goris

SCHRIFTELIJK EXAMEN VMBO-KB 2016

Ruud Jongeling

In deze examenbespreking geeft Ruud Jongeling eerst een algemene beschouwing van het examen en daarna gaat hij in op de verschillende contexten. Een aantal keer betrekt hij de antwoorden van zijn eindexamenleerlingen uit de sector zorg & welzijn bij de bespreking van de vragen.

Algemeen

Het schriftelijke examen wiskunde voor de kaderberoepsgerichte leerweg is afgenomen op donderdagmiddag 19 mei. De leerlingen maakten een examen dat bestond uit 27 vragen waarvoor ze maximaal 75 punten konden halen. De 27 vragen waren verdeeld over zeven contexten. De onderstaande tabel laat de puntenverdeling per context zien:

Schriftelijk examen vmbo-KB 2016 – contexten	Puntentotaal	% Eindscore
Grootste stroopwafel	12	16%
E-scooter	11	15%
IJsberg	12	16%
Skispringen	10	13%
Schoolbanken	10	13%
Schoenenrek	11	15%
Spaarrekening	9	12%

tabel 1 Puntenverdeling over de contexten

De punten zijn in dit examen min of meer gelijk verdeeld over de contexten. Een context kan de ene leerling meer aanspreken dan de andere leerling. Een ongelijke verdeling van de punten over de contexten zou in het voor- of nadeel van de leerling kunnen werken. Dat is in dit examen dus niet het geval.
De examenstof van het centraal examen betreft de domeinen: algebraïsche vaardigheden, meetkunde en rekenen, meten en schatten. Verdelen we de vragen over deze domeinen dan ontstaat het volgende overzicht van de puntenverdeling:

Schriftelijk examen vmbo-kb 2016 – examendomeinen	Puntentotaal	% Eindscore
Algebraïsche vaardigheden	21	28%
Rekenen, meten en schatten	25	33%
Meetkunde	29	39%

tabel 2 Puntenverdeling over de examendomeinen

Je mag verwachten dat de drie domeinen in het examen ongeveer in gelijke mate aan bod komen. In dit examen kwamen de meetkundige vaardigheden iets meer aan bod dan de algebraïsche vaardigheden. Het verschil valt naar mijn mening binnen de marges die een vaststellingscommissie nodig heeft om een examen met contexten te kunnen samenstellen. De N-term voor dit examen is vastgesteld op 0,5. De N-term kan worden gezien als een indicatie voor de moeilijkheid van het examen. Dit examen is, ten opzichte van de examens van voorgaande jaren, relatief goed gemaakt.

Jaar	N-term 1e tijdvak	N-term 2e tijdvak
2016	0,5	0,5
2015	1,0	1,0
2014	0,9	0,9
2013	1,2	1,3
2012	1,1	1,1
2011	1,3	1,8

tabel 3 N-termen van de afgelopen jaren

Grootste stroopwafel

De eerste context betrof de bakkers uit Gouda die in 2013 het wereldrecord 'grootste stroopwafel bakken' verbraken. Het examen startte met twee vragen die over het algemeen bij mijn leerlingen weinig problemen opleverden. De eerste vraag was er een waarbij de leerlingen verhoudingen moesten omrekenen naar ingrediënten voor de recordstroopwafel. Bij de tweede vraag moesten de leerlingen de omtrek van de recordstroopwafel berekenen. De derde vraag betrof het uitrekenen van de oppervlakte van de vierkante bakplaat die *niet* voor de recordstroopwafel werd gebruikt. Mij viel op dat veel van mijn leerlingen de vraag of helemaal goed maakten of er weinig of niets van bakten. Voor deze laatste groep was mogelijk de context van de bakplaat met daarop de recordstroopwafel niet duidelijk. Er was geen afbeelding voorhanden die de tekst toelichtte. Bij de vierde vraag moesten de leerlingen berekenen hoeveel keer groter de

oppervlakte van de recordstroopwafel was ten opzichte van de oppervlakte van een gewone stroopwafel. Zowel bij vraag 3 als bij vraag 4 moesten de leerlingen de oppervlakte van de recordstroopwafel uitrekenen. Kon je dat bij vraag 3 niet, dan kon je vraag 4 ook niet maken.

E-scooter

Van de tweede context, Farzad die overweegt een elektrische scooter te kopen, leverden de eerste drie vragen met rechttoe rechtaan rekenwerk bij mijn leerlingen weinig problemen op. Voor de laatste vraag (vraag 8 van het examen) konden de leerlingen 4 punten krijgen. Zelf heb ik de vraag een aantal keren moeten lezen voordat ik goed doorhad wat er nu eigenlijk gevraagd werd. Omdat het om een vergelijking van een benzinescooter en een elektrische scooter ging zocht ik de prijs van de benzinescooter om te zien hoeveel duurder de elektrische scooter was. Die is niet gegeven omdat de hele e-scooter moet worden terugverdiend en niet alleen het prijsverschil tussen beide. De tweede hobbel in de vraag is dat de gegevens voor de leerling per jaar zijn en de vraag is na hoeveel maanden Farzad de kostprijs van de e-scooter heeft terugverdiend. Nogal wat van mijn leerlingen deelden het bedrag van de scooter (€2100,00) door €45,00 (kosten elektriciteit per jaar) of 850 (kosten benzine per jaar) en raakten daarna het spoor bijster, zie figuur 1.

€ 2100,- : 45 = afgerond 47 jaar
47 jaar x 12 = 564 maanden

figuur 1 Antwoordvoorbeeld van opgave 8

IJsberg

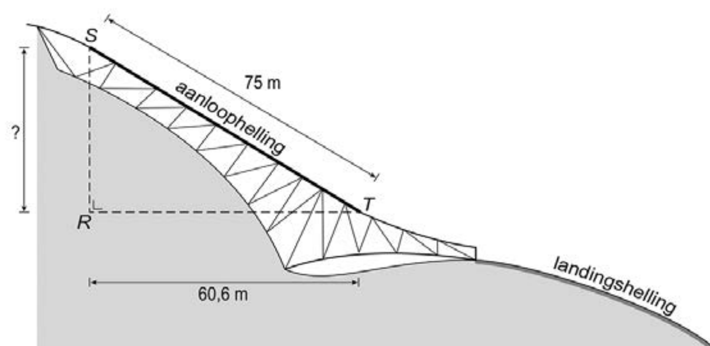
In de context *IJsberg* gingen de leerlingen met een tabel en een formule met tweede en derde machten aan de slag. De leerlingen moesten aan de hand van de tabel het percentage uitrekenen dat de ijsberg in de eerste twee maanden was afgenomen en op de uitwerkbijlage moesten de leerlingen een grafiek tekenen die bij de formule hoort. Een aanvulling op het correctiemodel gaf aan dat de leerlingen in deze tabel ook op duizendtallen mochten afronden. Op de eerste drie vragen van deze context zag ik bij mijn leerlingen veel goede antwoorden. De vierde vraag (vraag 12 van het examen) was een vraag die kon worden opgelost door inklemmen. Dat lukte veel leerlingen wel maar daarna werd de beoordeling van hun eindantwoorden voor mij lastig. Het correctiemodel schreef voor: 'in de (loop van) de 42e maand' maar wat doe je dan met een antwoord als 41,2 of met het antwoord in figuur 2 waarin de leerling naar mijn mening laat zien dat zij het wel begrepen heeft? Op het forum van de NVvW is hier al het nodige over gezegd, maar voor mij blijft toch de vraag

in de uitste maand want
80000 - 4900 x 41 + 113 x 41² - 41³ = 132
80000 - 4900 x 42 + 113 x 42² - 42³ = -556 en dan
kan niet dus na 41 maanden
~~[illegible]~~ in maand 41

figuur 2 Antwoordvoorbeeld van opgave 12

of het kunnen omzetten van een uitkomst als 41,2 naar de 42^e maand nu wel of niet bedoeld was als een te toetsen vaardigheid.

Skispringen

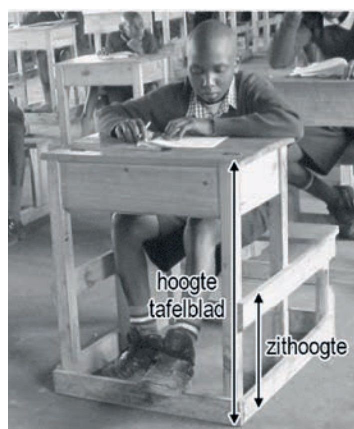


figuur 3 Skischans uit de context 'skispringen'

De context *Skispringen*, zie figuur 3, startte met een rekenopgave, het omrekenen van een snelheid in km/u naar m/s. Altijd lastig voor de leerlingen. De tweede en de derde opgave betrof het toepassen van de stelling van Pythagoras om de lengte *ST* te berekenen en het berekenen van hoek *T* met de cosinus. De antwoorden van de leerlingen op de vierde en laatste vraag van de context hebben me verbaasd. Op de skischans werd het startpunt *S* verplaatst naar een lager punt op de schans. Aan de leerlingen werd gevraagd wat er dan verandert. Heel vaak meenden mijn leerlingen dat daarmee ook de grootte van de hellingshoek *T* veranderde. Zouden de antwoorden anders zijn geweest wanneer in plaats van 'lager op de schans' gesproken zou zijn over 'lager op de aanloophelling'? Overigens ben ik van mening dat bij de gegeven antwoordmogelijkheden bij de hellingshoek de letter *T* en bij de aanloophelling de letters *ST* hadden moeten staan.

Schoolbanken

De context *Schoolbanken* laat een leerling in Kenia in zijn schoolbank zien, zie figuur 4. De zithoogte van de schoolbank is 34 cm en de eerste vraag is te 'berekenen door te meten' hoeveel cm de hoogte van het tafelblad is. Bedoeld wordt de *werkelijke* hoogte van het tafelblad te berekenen en daarbij de hoogte van het tafelblad en zithoogte uit de foto te gebruiken. Gelukkig hebben mijn leerlingen dit ook zo opgevat. Ze vonden dit overi-



figuur 4 Een leerling in Kenia in zijn schoolbank

gens een lastige vraag. De tweede vraag van de context, het verlengen van een gegeven tabel met maten van de schoolbank en bijbehorende lengten van leerlingen tot ook een leerling met een lengte van 1,90 meter er in past, leverde weinig moeilijkheden op. Bij de derde vraag moesten de leerlingen aan de hand van een gegeven tabel een lineaire formule opstellen. Het hellingsgetal wisten de leerlingen wel te vinden maar omdat de tabel niet bij 0 maar bij 1 begon ging een aantal leerlingen met het startgetal de mist in. Voor mij een signaal dat ik hier in de lessen meer aandacht aan moet besteden.
De laatste opgave van de context (vraag 20 in het examen) vraagt waarom er geen schoolbanken met maat 30 gemaakt zullen worden. Deze vraag laat afhankelijkheid zien met de vorige vraag. De leerlingen die bij de voorgaande vraag geen formule hadden gevonden, konden deze vraag ook niet maken. Eén leerling heeft nog iets geprobeerd met de tabel, zie tabel figuur 5, maar vergat bij de verdubbeling van de maten van 15 naar 30 dat ze daarmee ook het startgetal verdubbelde.

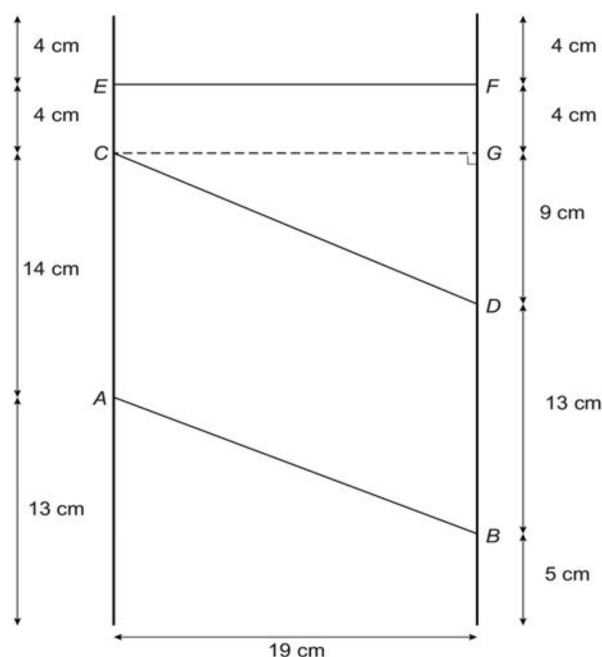
7	8	9	10	11	12	13	14	15
54	58	62	66	70	74	78	82	86

Bij 15 is de lengte 86 cm en
86/86 = 1,72 m en, kinderen worden de meeste niet groter
dan 1,72

figuur 5 Antwoordvoorbeeld van opgave 20

Schoenenrek en spaarrekening

De context *Schoenenrek*, waarbij van bezemstelen een schoenenrek gemaakt wordt, leek me typisch een techniek context en bij het nakijken was ik dan ook benieuwd hoe de leerlingen van zorg & welzijn de opgaven gemaakt hadden. Dat viel mee, alleen de eerste opgave waarin berekend moest worden hoeveel bezemstelen er nodig zijn, is maar matig gemaakt. Veel leerlingen telden de lengten op en deelden het totaal door de lengte van één bezemsteel. Ze kwamen dan op drie bezemstelen, omdat ze van de restjes nieuwe staanders maakten. Hoewel ik aan het afronden in contexten bij de oefenexamens nog speciaal aandacht had besteed, hebben veel leerlingen hier toch overheen gekeken. De tweede en vierde vraag van de context betroffen het toepassen van de stelling van Pythagoras en goniometrie. Bij de derde vraag (vraag 23 van het examen) moesten de leerlingen beredeneren dat de lijnstukken *AB* en *CD* van het schoenenrek niet evenwijdig waren, zie figuur 6. Een mooie opgave die door de leerlingen verschillend werd opgelost, zie figuren 7 en 8.



figuur 6 Zijaanzicht van het schoenenrek uit de uitwerkbijlage

Van A naar C is het 14 cm en van B naar D ~~14~~ 13 cm.

figuur 7 Antwoordvoorbeeld van opgave 23

13 − 5 = 8 cm

zijde	kwadraat
Rh2 BC 19 cm	361
Rh2 CA 8 cm	64 +
L2 AB 20,62 cm	√425 = 20,62

Lijn CD was 21,02 cm
Lijn CD is groter als lijn AB
het verschil is 21,02 − 20,62 = 0,4 cm
Lijn AB is 0,4 cm kleiner.

figuur 8 Antwoordvoorbeeld van opgave 23

Het examen sloot af met de context *Spaarrekening* waarbij de opa van Sven een spaarrekening voor het ventje opent, er €700 op zet en maar liefst 2,2% rente per jaar krijgt. Kom daar maar eens om in deze tijd! De exponentiële formule waarmee het bedrag op de spaarrekening kan worden uitgerekend, werd gegeven. Bij de eerste vraag moesten de leerlingen de formule toepassen en bij de tweede vraag moesten de leerlingen een grafiek tekenen waarbij ze de tabel op de uitwerkbijlage moesten gebruiken. Deze vragen bevatten geen verrassingen en konden mijn leerlingen over het algemeen goed maken. In de laatste vraag (vraag 27 van het examen) wordt gevraagd na hoeveel hele jaren er voor het eerst meer dan 1000 euro op de rekening staat. Een niet al te moeilijke inklemopgave waarbij een enkeling over het hoofd zag dat hier naar hele jaren gevraagd werd.

Tot besluit

Het schriftelijk examen vmbo-kb van 2016 laat een evenwichtige verdeling van de punten zien over zowel de contexten als de drie domeinen van het eindexamenprogramma. Het bevatte geen grote verrassingen en de N-term laat dan ook zien dat het examen over het algemeen goed gemaakt is. Waar de stelling van Pythagoras en goniometrie voor de tweede keer in het examen voorkwamen, betrof het verschillende toepassingen. Tegelijkertijd laat het examen ook een aantal slordigheden zien. Zo zit er in dit examen twee keer afhankelijkheid. Kon je iets niet bij de ene opgave, dan kon je dat ook niet bij de andere. Het betreft de contexten *Grootste stroopwafel* en *Schoolbanken*. Ook de vraagstellingen vond ik niet altijd even duidelijk. Ik denk dan aan de derde vraag bij *Grootste stroopwafel*, de laatste vraag in de context van de *E-scooter*, de multiplechoicevraag bij het *Skispringen* en de eerste vraag bij de context *Schoolbanken*. Met betrekking tot het correctiemodel blijft voor mij nog altijd de vraag of het nu wel of niet de bedoeling was van de samenstellers van het examen dat de leerlingen het antwoord 41,2 maanden konden interpreteren als de 42e maand. Het zag er even naar uit dat het schriftelijk examen 2016 voor de kaderberoepsgerichte leerweg het laatste schriftelijk examen zou zijn. Als het aan de CvTE lag zouden volgend schooljaar ook voor de kaderberoepsgerichte leerweg de digitale examens verplicht worden. Bij de bespreking van de Examenmonitor 2015 door de vaste Kamercommissie van OC&W op 15 juni jl. is door de staatssecretaris aangegeven dat pas tot verplichting van de digitale examens wordt overgegaan na een grondige evaluatie in 2018. Volgend jaar dus nog gewoon een schriftelijk kb-examen!

Over de auteur

Ruud Jongeling is wiskundeleraar op het Da Vinci College in Roosendaal, een school voor de beroepsgerichte leerwegen in het vmbo en het praktijkonderwijs. Sinds februari van dit jaar is hij voorzitter van de werkgroep vmbo van de NVvW. E-mailadres: *rj.jongeling@kpnmail.nl*

MEDEDELING



FINALE NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

Op vrijdag 16 september vindt op de Technische Universiteit Eindhoven de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats. Hiervoor zijn 153 leerlingen uitgenodigd uit de categorieën zesde klas, vijfde klas en vierde klas of lager. Zij krijgen in drie uur tijd vijf pittige opgaven voor hun kiezen. Voor docenten die meegaan naar de finale is er tijdens de wedstrijd een onderhoudende lezing van Jan van de Craats.
Vanaf maandag 19 september vindt u de opgaven (en uitwerkingen) van de finale op www.wiskundeolympiade.nl. De vijftien prijswinnaars (vijf uit elk van de drie categorieën) worden 11 november bekendgemaakt tijdens de prijsuitreiking.

EXAMEN VMBO-TL

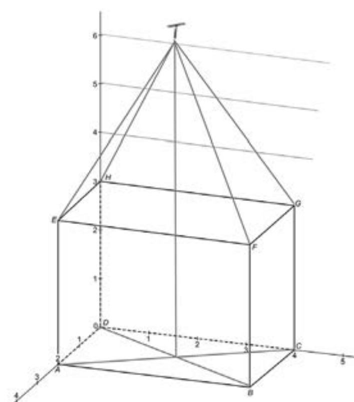
Ebrina Smallegange

Op donderdagmiddag 19 mei 2016 deden de leerlingen van vbmo-tl examen wiskunde. Ebrina Smallegange had hoge verwachtingen van het merendeel van haar groep van 28 leerlingen. Hieronder leest u hoe het hen is vergaan.

Ik geniet altijd van de drukte en de spanning in de examentijd. Het examen zou om half twee beginnen, maar al om één uur stond er een groepje leerlingen om me heen met de vraag of hun rekenmachines wel goed waren ingesteld. De meesten van mijn leerlingen hebben een Casio *fx82MS.* U weet het waarschijnlijk wel: als deze rekenmachine gereset wordt, wordt bijvoorbeeld het getal 1 000 weergegeven als 1,000. Er zijn leerlingen die dan op helen gaan afronden...
Het is ook lang niet altijd zeker of de rekenmachine werkt met graden, radialen of grades. Vlak voor een wiskunde-examen willen de leerlingen toch wel zeker weten of de instelling van hun rekenmachine is zoals ze het gewend zijn. Van de dertien Casio's stonden er twee op radialen ingesteld. Goed dat die leerlingen even waren langsgekomen!
Het volgende probleem diende zich aan: moeten we haast maken tijdens het examen? Hebben we tijd genoeg? Is het een lang examen?
Ik probeerde hen gerust te stellen: 'Doe rustig aan, lees de tekst en de vragen goed door. Het zal vast goed gaan, jullie zijn goed in wiskunde, laat gewoon zien wat je kunt!' De meeste van de 28 leerlingen die ik dit jaar in 4 vmbo-tl heb, zijn inderdaad goed in wiskunde, het gemiddelde schoolexamencijfer van de klas is een 6,7.
Om kwart over één ging iedereen gerustgesteld, maar natuurlijk ook gespannen, de gymzaal in voor het examen dat twee uur zou duren. Maar twee uur later zat driekwart van de leerlingen nog in de gymzaal. Was het zo lang? Was het zo moeilijk?
Daniëlle, die om kwart voor drie al klaar was, had gezegd dat het 'een eitje' was, maar wel veel werk. Vooral het eerste onderdeel was veel werk: de lange formules moest je goed intypen, maar dat was dan ook alles. Nee, zij had er alle vertrouwen in dat het goed was gegaan.
Om half vier kwam bijna iedereen de gymzaal uit, ook de dyslectische leerlingen. De enige die haar toetstijdverlenging werkelijk gebruikte was Karin. Karin heeft dyscalculie.
De leerlingen waren moe, maar niet in paniek. Ze klaagden over de lange formules bij de eerste vragen en de vreemde meerkeuzevraag op het eind. Dat antwoord was toch gewoon D? Waarom stellen ze zo'n makkelijke vraag? Ze hadden bijna allemaal alles nog eens overgekeken, her en der een afronding verbeterd, maar voor het grootste gedeelte ging het prima, zeiden ze.

Toen kwam voor mij het werk. Ik heb eerst zelf het examen gemaakt. Niet foutloos, helaas. Ik haalde 76 van de 77 punten. De fout die ik maakte bij vraag 8 bleek ook door veel van mijn leerlingen gemaakt te zijn. In figuur 1 ziet u de vraag en een kopie van het werk van Rik. Ziet u de fout?

Bovenop deze balk komt een piramide. Het bovenvlak *EFGH* van de balk is het grondvlak van deze piramide. Top *T* van de piramide heeft coördinaten (1, 2, 6).
→ Teken in de tekening op de uitwerkbijlage de piramide op de balk. Laat duidelijk zien hoe je dit gedaan hebt.



figuur 1

Mijn leerlingen hadden weinig geoefend met 3D-tekenen. Bovendien was bij alle geoefende examenopdrachten het 3D-tekenen aftelbaar: een dobbelsteen van 2 cm hoog bovenop een andere dobbelsteen bijvoorbeeld. Als Rik (en ik!) een hulplijn *MT* getekend zou hebben (met *M* het midden van het boven- of ondervlak), dan zouden we zonder veel denkwerk de hoogte van de top op deze hulplijn hebben afgeteld.
Er waren slechts drie leerlingen die voor deze vraag alle punten kregen!

IJsberg

Maar laat ik bij het begin beginnen. De eerste vier vragen van het examen gingen over een smeltende ijsberg. Na een introductie in de context en een eenvoudige percentageberekening werd een formule gegeven met *G:* het gewicht van de ijsberg in ton en *t:* de tijd in maanden na het afbreken van de ijsberg. U ziet de formule en de bijbehorende vraag in figuur 2.

$G = 80\,000 - 4900 \times t + 113 \times t^2 - t^3$

Laat met een berekening zien dat in de twintigste maand volgens de formule ongeveer 1600 ton ijs gesmolten is.

figuur 2

Slechts vier leerlingen in mijn klas van 28 leerlingen wisten dat ze hiervoor $t = 19$ en $t = 20$ moesten gebruiken. Een paar leerlingen gebruikten $t = 20$ en $t = 21$. Zij kwamen op 1528 ton gesmolten ijs. U ziet in figuur 3 het werk van Mick, die brutaalweg noteert:

80000 – 4900 x 20 + 113 x 20² – 20³ = 19200
80000 – 4900 x 21 + 113 x 20² – 20³ = 17672
19200 – 17672 = 1528 is dus ongeveer 1600 ton.

figuur 3

Het merendeel van mijn leerlingen heeft alleen $t = 20$ ingevuld. Misschien dachten zij dat naar het gewicht van de ijsberg in de twintigste maand werd gevraagd? Helaas, als $t = 20$, dan geldt $G = 19\,200$.
Doordat dit een 'laat zien'-vraag was, wisten deze leerlingen nu al dat het antwoord dat zij op deze vraag gaven, fout was. Zo'n lastige 'laat zien'-vraag aan het begin van het examen zou eigenlijk vermeden moeten worden.
Na het mislukken van vraag 2 bij velen, kwam vraag 3: Teken een grafiek bij de formule. Voor het eerst sinds lange tijd moesten leerlingen op een examen zelf een juiste verdeling bij de verticale as maken. Ik had mijn leerlingen in klas 4 tijdens de examentraining niet voorbereid op het indelen van de as bij het tekenen van een grafiek. Dat was al zo lang niet meer aan de orde geweest op een examen! Maar gelukkig beheersten de meesten die vaardigheid nog vanuit klas 1, 2 en 3.
Op het forum bleek onwennigheid van collega's om een asindeling bij een examen na te kijken. Er waren meerdere topics over vraag 3 aangemaakt, die heel vaak bekeken zijn en waarbij vragen gesteld werden als: wat doe je als de nul niet bij de verticale as is geschreven? En als er geen stappen van 10 000 genomen zijn maar van 8 000? En als de 90 000 en 100 000 niet bij de as staat? Het is goed dat er in zulke gevallen een forum is om collegiaal te overleggen! Ik vraag me af hoe dat bij de digitale examens van de beroepsgerichte leerwegen gaat. Omdat die examens geheim zijn, mogen er over deze examens geen vragen op het forum worden gesteld.
Bijzonder was in vraag 3 de opdracht om de tabel te gebruiken. In vorige examens stond in zulke gevallen: je *mag* de tabel op de uitwerkbijlage gebruiken. Drie van mijn leerlingen hebben de tabel leeg gelaten. Zij kregen, volgens het correctievoorschrift, één punt minder: de tabel was één punt waard. Of moest ik hen twee punten minder geven?
In het correctievoorschrift stond namelijk nog een opmerking, zie figuur 4:

- De waarden in de tabel juist berekend 1
- Een juiste schaalverdeling bij de verticale as gekozen 1
- De punten juist overgenomen in de grafiek 1
- Een vloeiende kromme door de punten getekend 1

Opmerking
Voor elk fout of niet berekend/getekend punt 1 scorepunt in mindering brengen tot een maximum van 2 scorepunten.

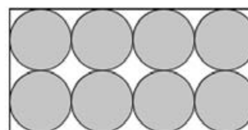
figuur 4

Bij vraag 4 werd gevraagd te berekenen in de hoeveelste maand het laatste stukje van de ijsberg gesmolten moet zijn. Veel van mijn leerlingen klemden correct in, maar hadden moeite om een juiste conclusie te formuleren. Er waren antwoorden als: tussen de 41e en 42e maand, na de 42e maand, bij 41,2 maanden. Dit alles, volgens de centrale examenbespreking, min 1 punt. Dezelfde leerlingen die bij vraag 2 niet wisten wat er met 'de twintigste maand' werd bedoeld, konden nu niet het antwoord 'in de 42e maand' formuleren. Jammer dat tweemaal dezelfde vaardigheid in dit examen werd gevraagd, vooral omdat deze vaardigheid eigenlijk meer op het gebied van taal dan op het gebied van wiskunde ligt.

Balk

Het tweede onderdeel van het examen betrof een balk, getekend in een *xyz*-assenstelsel. De maten in centimeter waren gegeven. Leerlingen moesten de coördinaten van één van de hoekpunten geven en de lengte van een lichaamsdiagonaal berekenen. Dat kwam de meeste leerlingen van mijn klas bekend voor en dat ging dan ook goed.
Een grotere uitdaging was vraag 7 (zie figuur 5).

De balk wordt helemaal gevuld met bollen van gelijke grootte. Je ziet het bovenaanzicht van de balk.



→ Bereken hoeveel cm^3 ruimte er in de balk overblijft. Laat zien hoe je aan je antwoord komt.

figuur 5

Allereerst moesten de leerlingen het bovenaanzicht vergelijken met de 3D-tekening om de maten van de rechthoek te weten te komen. Dat ging goed. Daarna moesten ze veel denk- en rekenstappen maken: hoe groot is de straal

van een bol? Hoe groot is dan de inhoud? Hoeveel bollen passen in de balk? Hoe groot is de inhoud van de balk? Hoeveel cm^3 blijft er dan over?
En ik had het nog zó gezegd: 'goed lezen!!' Vier leerlingen hebben de balk niet met bollen, maar met cilinders gevuld. Als de rest van het antwoord wel correct was, kostte hen dat 2 punten.
Even tussendoor:
Ik heb soms een beetje moeite met het correctievoorschrift. Dat is onder andere bij vraag 7 het geval. U ziet het voorgestelde antwoord in figuur 6.

7 maximumscore 5

- Een bol heeft een straal van 0,5 (cm) 1
- De inhoud van één bol is $\frac{4}{3} \times \pi \times 0{,}5^3 = 0{,}52\ldots$ (cm 1
- Er zitten (8 × 3 =) 24 bollen in de balk 1
- De inhoud van de balk is $2 \times 4 \times 3 = 24$ (cm^3) 1
- $24 - 24 \times 0{,}52\ldots = 11$ (cm^3) (of nauwkeuriger) 1

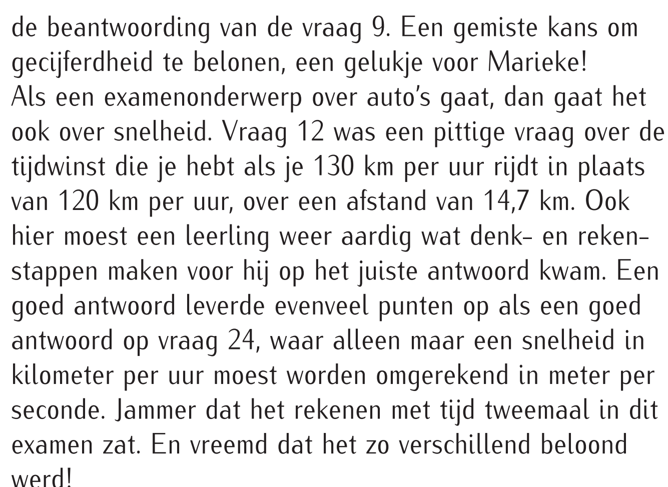
figuur 6

Net als alle wiskundedocenten probeer ik mijn leerlingen aan te leren om altijd berekeningen op te schrijven. Het is mij niet duidelijk waarom het correctievoorschrift soms berekeningen wel verplicht stelt en soms niet. Waarom staat hier '8 × 3 =' tussen haakjes?
Het veroorzaakt vreemde discussies met de tweede corrector als een leerling 8 × 3 wel heeft opgeschreven, maar 2 × 4 × 3 niet. Dat is vooral lastig als een leerling een totaal andere aanpak heeft gekozen dan het correctievoorschrift en daar dan af en toe een berekening heeft weggelaten.
Ik hoop dat in de toekomst de correctievoorschriften hierover nog wat consequenter worden.

Auto's

Het derde onderdeel ging over auto's. Vraag 9 leek een fijne binnenkomer. Er werd een exponentiële formule gegeven voor het aantal auto's in de jaren tussen 1900 en 1938. Leerlingen moesten aangeven of deze formule klopte voor het aantal auto's in 2014. Toch viel voor sommige leerlingen deze vraag behoorlijk tegen. In de tekst van vraag 9 stond niet vermeld hoeveel auto's er in Nederland waren in 2014. Als de formule wordt gebruikt, komt daar een aantal auto's uit dat veel te groot is voor Nederland. De gecijferde leerlingen zagen: zoveel auto's kunnen er helemaal niet zijn in Nederland. Mick schreef: dan zouden er 700 auto's zijn per Nederlander.
Hier werd van de leerlingen gevraagd om te vertrouwen op hun eigen kennis over het aantal auto's in Nederland. Marieke had (correct) berekend dat er 11 863 647 510 auto's zouden zijn in 2014. U ziet haar werk in figuur 7.

Kunt u nog lezen wat ze heeft doorgestreept? 'Ja, dat kan kloppen'! Volgens de aanvulling op het correctievoorschrift mocht de informatie van vraag 10 ook gebruikt worden bij



figuur 7

de beantwoording van de vraag 9. Een gemiste kans om gecijferdheid te belonen, een gelukje voor Marieke!
Als een examenonderwerp over auto's gaat, dan gaat het ook over snelheid. Vraag 12 was een pittige vraag over de tijdwinst die je hebt als je 130 km per uur rijdt in plaats van 120 km per uur, over een afstand van 14,7 km. Ook hier moest een leerling weer aardig wat denk- en rekenstappen maken voor hij op het juiste antwoord kwam. Een goed antwoord leverde evenveel punten op als een goed antwoord op vraag 24, waar alleen maar een snelheid in kilometer per uur moest worden omgerekend in meter per seconde. Jammer dat het rekenen met tijd tweemaal in dit examen zat. En vreemd dat het zo verschillend beloond werd!

Schoolbanken

Het vierde onderdeel, schoolbanken, begon met een foto van een jongen in Kenia in een houten schoolbank. De zithoogte en de hoogte van het tafelblad waren in de foto met pijltjes aangegeven.
In vraag 13 moesten leerlingen de zithoogte en de hoogte van het tafelblad meten en, uitgaande van de gegeven werkelijke zithoogte, de hoogte van het tafelblad berekenen.
Je kunt je afvragen of meten in deze foto correct is vanwege de vertekening door het perspectief. Misschien zegt het correctievoorschrift daarom dat de meetmarge 2 mm mag zijn?
In de volgende vragen werden verschillende maten schoolbanken geïntroduceerd, zie figuur 8.

Bij elke maat schoolbank hoort een bepaalde zithoogte.
Hieronder zie je een tabel, waarin de maat van de schoolbank en de bijbehorende zithoogte in cm staat.

maat schoolbank	1	2	3	4	5	6
zithoogte (cm)	30	34	38	42	46	50

Er is een lineair verband tussen de *zithoogte* en de *maat* van de schoolbank.
→ Geef een woordformule die bij dit verband hoort.

figuur 8

Hadden de examenmakers voorzien dat het begrip 'woordformule' zoveel problemen zou veroorzaken? Veel van mijn leerlingen wisten niet meer wat een woordformule was. Ook op het forum meldden collega's dat hun leerlingen in verwarring waren door de formulering van vraag 15. Een collega meldde dat een leerling als antwoord gaf:

‘Lineaire formule’, en bij de berekening van vraag 16 deze formule gewoon opschreef! Nul punten voor deze leerling bij vraag 15. Of misschien hebben de eerste en tweede corrector de suggestie van een collega op het forum overgenomen: ‘Met een beetje (veel) goede wil kun je het als notatiefout zien: vergeten het getal 15 op de juiste plaats voor de kantlijn te zetten. ☺’
Toen ik mijn leerlingen na afloop van het examen vertelde dat een woordformule een formule is met woorden in plaats van letters, gaven ze allemaal aan dat ze wél een formule met letters hadden kunnen geven. Maar een woordformule? Gelukkig hoefde ik hen niet uit te leggen dat in het correctievoorschrift stond dat voor een formule met letters geen scorepunten in mindering gebracht hoefden te worden. Hadden ze dat geweten...! En ik had toch zó gezegd: ‘Laat zien wat je kunt!’
Het berekenen in vraag 16, waarom er geen schoolbanken met maat 30 gemaakt zullen worden, was voor veel leerlingen niet al te moeilijk; het goed formuleren van het antwoord wél. Mijn leerlingen weten heus wel dat ‘dan komt er 146 uit en dat is niet goed’ geen goed antwoord op deze vraag is. Waarom geven ze zulke antwoorden dan toch?!

Gatenzaag

En dan de gatenzaag, het vijfde onderwerp van het examen. Met een gatenzaag worden gaten in een plank geboord om een dienblad voor glazen limonade (!) te maken. Figuur 9 is de afbeelding die erbij hoort.

Gatenzaag



figuur 9

De diameter van de gatenzaag was in inches en in mm gegeven. In vraag 17 moesten leerlingen berekenen hoeveel mm 1 inch is. Een verhoudingstabel bleek voor veel van mijn leerlingen een handig hulpmiddel om te bepalen of ze $67 : 2\frac{5}{8}$ moesten berekenen of $2\frac{5}{8} : 67$.

Ze kwamen er uit, gelukkig! Vraag 18 ziet u in figuur 10.

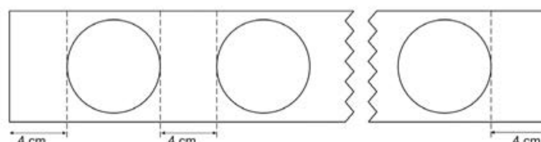
Bent u nu ook op zoek naar de breedte van een tand? Die breedte is niet gegeven! Er zijn leerlingen die hebben geantwoord: ‘De afstand is 0 mm, want de tanden staan tegen elkaar aan.’ Andere leerlingen namen aan dat de breedte van een tand 1 mm is en rekenden daarmee

De gatenzaag heeft rondom 44 tanden die op gelijke afstand van elkaar staan.
→ Bereken hoeveel mm de afstand tussen de tanden is. Schrijf je berekening op. Rond je antwoord af op één decimaal.

figuur 10

verder. Weer andere leerlingen namen aan dat hier de afstand tussen de toppen van de tanden werd bedoeld. Deze laatste leerlingen hebben hierbij het correctievoorschrift en de Toets- en Examenlijn aan hun zijde. Als antwoord op mijn klacht over deze vraag antwoordde de Toets- en Examenlijn: ‘[...] Bij deze vraag wordt van GL/TL leerlingen verwacht dat zij het inzicht hebben dat de afstand waarnaar gevraagd wordt, de afstand tussen de toppen van de tanden is. [...]’ Gelukkig kunnen andere correcte antwoorden (afstand is nul mm, een waarde aannemen voor de breedte van een tand) volgens regel 3.3 van de algemene regels van het correctievoorschrift ook goed gerekend worden. In mijn ogen is dit weer een verwarrende vraag, terwijl ook hier deze verwarring waarschijnlijk niet bedoeld is.
In vraag 19 moest de oppervlakte in cm^2 van een gat berekend worden. Een eenvoudige vraag die bijna al mijn leerlingen de volle drie punten opleverde. Vraag 20 is in mijn ogen een pareltje. U ziet hem in figuur 11.

3p **20** Emre heeft een plank van 98 cm lang. Aan het begin en aan het eind van de plank en tussen twee gaten moet steeds minimaal 4 cm zitten. Je ziet een schets van de situatie, waarbij een stuk van de plank is weggelaten.



→ Bereken, zonder te meten, hoeveel gaten hij maximaal in de plank kan boren. Schrijf je berekening op.

figuur 11

Dit is een vraag waar de sterkere leerling mee uit de voeten kan, maar ook een zwakkere leerling met voldoende doorzettingsvermogen kan hiervoor een oplossing bedenken. U ziet een uitwerking van een echte doorzetter in figuur 12. Let niet op het ‘breiwerk’, dat

20 ~~98 cm - 4 = 94 cm - 4 = 90 cm - (21) = 69 - 4 =~~
~~65 - (21) = 44 - 4 = 40 - (21) = 23 - 4 = 19~~
~~- hij kan 3 gaten~~
67 mm = 6,7 cm
98 - 8 = 90 - (6,7) = 83,3 - 4 = 79,3 - (6,7) = 72,6
- 4 = 68,6 - (6,7) = 61,9 - 4 = 57,9 - (6,7) =
51,2 - 4 = 47,2 - (6,7) = 40,5 - 4 = 36,5 - (6,7) =
29,8 - 4 = 25,8 (6,7) = 19,1 - 4 = 15,1 - (6,7) =
8,4 - 4 = 4,4
- hij kan 8 gaten maken.

figuur 12

hoeft de corrector volgens de vakspecifieke regels van het correctievoorschrift ook niet te doen.

Kettingmail

Het zesde onderwerp ging over Kettingmail. Volgens mij kwam in dit onderdeel de moeilijkste vraag van het examen voor. U ziet de introductie in figuur 13.



Een museum heeft extra geld nodig voor een speciale tentoonstelling. Dat geld willen ze ophalen met een e-mailactie. Ze sturen een e-mail naar 4 mensen. Aan deze mensen wordt gevraagd om 10 euro te schenken aan het museum en de e-mail door te sturen naar 4 andere mensen en hen ook te vragen om 10 euro te schenken aan het museum. Dit noemen we een kettingmail.

We gaan er in deze opgave vanuit dat iedereen die zo'n e-mail ontvangt, de 10 euro schenkt en de e-mail aan 4 andere mensen doorstuurt. De eerste 4 mensen die de e-mail ontvangen horen bij ronde 1.

Het verband tussen het aantal e-mails en de (bijbehorende) ronde wordt gegeven door de formule

$$A = 4^r$$

Hierin is A het aantal e-mails dat verstuurd wordt in ronde r.

figuur 13

Na deze lange introductie moesten leerlingen in vraag 21 laten zien dat in ronde 3 al meer dan 50 e-mails worden verstuurd. In vraag 22 werd gevraagd te berekenen in welke ronde er 1024 e-mails verstuurd worden. Mijn leerlingen maakten hier bijna geen fouten.
Maar dan vraag 23 (zie figuur 14):

In totaal moet er 50 000 euro opgehaald worden om de tentoonstelling door te laten gaan. Omdat iedereen meedoet, is er na de eerste ronde 40 euro binnen, na de tweede ronde 40 + 160 = 200 euro, enzovoort.
→ Na welke ronde is er 50 000 euro opgehaald? Schrijf je berekening op.

figuur 14

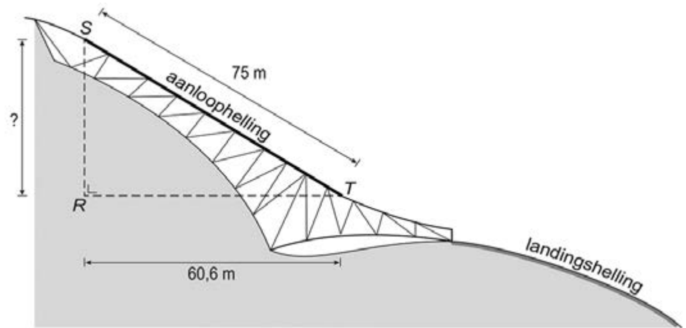
De te maken berekening wordt hier bijna voorgedaan! Maar uit de antwoorden van mijn leerlingen kon ik opmaken dat ze moeite hadden om dit te begrijpen. Er waren slechts drie leerlingen die deze vraag helemaal goed hadden, velen hadden hun antwoord zo ongeveer geformuleerd als de leerling in figuur 15.

23 = 4^7 = 16.384
4^8 = 65.536 dus na 8 rondes.

figuur 15

Skispringen

En dan het laatste onderdeel: Skispringen (zie figuur 16).



figuur 16

Na een introductie waarin de woorden helling (schans) en aanloophelling werden uitgelegd, moesten leerlingen in vraag 24 een gegeven snelheid in kilometer per uur omrekenen naar meter per seconde. Dat zouden ze goed moeten kunnen doen en dat deden ze dan ook. Snel drie punten verdiend.
In vraag 25 werd gevraagd om zonder te meten RS te berekenen. Al mijn leerlingen herkenden dit als 'een vraag naar Pythagoras', niveau klas 2 vmbo-tl. De vraag naar hellingshoek T was ook al zo herkenbaar. Goniometrie is wel eens moeilijker geweest op een examen! Voor velen een opluchting.
En dan vraag 27, de laatste vraag van het examen en de eerste meerkeuzevraag in een wiskunde-examen vmbo-tl. U ziet de vraag en de keuzemogelijkheden in figuur 17.

Bij slechte weersomstandigheden verplaatst men de start (het punt S) naar een punt lager op de schans.
Wat verandert er dan?
A de grootte van de hellingshoek
B de lengte van de aanloophelling
C niets
D zowel de grootte van de hellingshoek als de lengte van de aanloophelling

figuur 17

Mijn leerlingen hadden gemiddeld ruim 52 van de 77 punten voor dit examen. Het is een best een sterke klas. Kunt u verklaren waarom 16 van mijn leerlingen deze vraag niet goed hebben beantwoord? Ik niet!

Tot slot

Een aantal vragen uit dit examen zou door leerlingen in klas 2 vmbo-tl zonder problemen beantwoord kunnen worden. Er zaten aan de andere kant ook een paar vragen tussen die wel erg veel denk- en rekenstappen vroegen. Ik geef mijn leerlingen, die zeiden dat het best te doen was, gelijk: het was best te doen.
Het is jammer dat er een moeilijke 'laat zien'-vraag aan het begin van het examen stond. Ook het tweemaal naar 'de hoeveelste maand' vragen en tweemaal een vraag over

snelheid stellen verdient niet helemaal de schoonheidsprijs.
Veel contexten van dit examen (auto's, schoolbanken, gatenzaag) hebben waarschijnlijk de technisch aangelegde leerlingen meer aangesproken dan de minder technische leerlingen. Is het erg rolbevestigend om te stellen dat dit meer een jongens- dan een meisjesexamen was?
Mijn leerlingen ondervonden bij sommige vragen meer moeilijkheden met de taal en de context dan met de wiskunde bij die context. Een reden te meer om in mijn lessen nog meer nadruk te leggen op taal bij wiskunde! Of het nu gaat om het lezen, om het analyseren van de context of om het formuleren van het antwoord, taal is belangrijk!
Daniëlle, die om kwart voor drie al klaar was, had trouwens 59 van de 77 punten. Met een N-term van 0,7 leverde haar dat een 7,6 op.

Over de auteur

Ebrina Smallegange is docent wiskunde en rekenen op de locatie Kesteren van de Regionale Scholengemeenschap Pantarijn. De uitwerkingen zijn van haar leerlingen.
E-mail: *esmallegange@gmail.com*

MEDEDELING

COMPETITITES EN COMPETENTIES



22ste symposium WGRWO, 17 september 2016

Examens en wedstrijden hebben altijd een rol gespeeld in het wiskundeonderwijs, bijvoorbeeld voor het testen van toegangseisen, kwaliteitscontrole van het onderwijs, stimuleren van competitie, of gewoon voor de lol.
In het programma voor dit jaar komen een viertal van deze examens en wedstrijden aan bod. We maken er geen wedstrijd van, maar hopen velen van u op het 22ste WGRWO symposium te zien.

9.30 - 10.15	Inloop en koffie
10.15 - 10.30	Welkom en mededelingen
10.30 – 11.15	De Wiskunde Olympiade In Nederland werd de eerste Wiskunde Olympiade georganiseerd in 1962, in 1969 nam voor het eerst een Nederlands team deel aan de Internationale Olympiade. In de loop van de jaren zeventig werd er serieus werk gemaakt van de voorbereiding op deze Olympiades. De spreker van vandaag was daar nauw bij betrokken. Spreker: Jan van de Craats.
11.15 – 12.00	Examens voor wijnroeiers in zestiende-eeuws Antwerpen In de handelsmetropool Antwerpen was om diverse redenen het snel en betrouwbaar kunnen bepalen van de inhoud van de verhandelde vaten van groot belang. Dat was de taak van de wijnroeiers, een functie die je alleen mocht uitoefenen na een stevig examen. Spreker: Ad Meskens.
12.00 – 13.30	Lunch
13.30 – 14.15	Examens voor lbo, mavo en vmbo De examens voor vmbo, vroeger lbo en mavo werden en worden door meer leerlingen afgelegd dan die voor havo/vwo. Toch staan die laatste examens meestal meer in de belangstelling. Vandaag nu eens niet. In deze voordracht staat de geschiedenis van die andere examens centraal. Spreker: Truus Dekker
14.15 – 14.45	Thee-, koffie- en frispauze
14.45 – 15.30	De Wiskunde A-lympiade Deze competitie voor teams van leerlingen die een dag lang werken aan een open opdracht waarbij een beroep wordt gedaan op 'higher order thinking skills' is ontstaan als een typisch Nederlands fenomeen, passend bij het vak Wiskunde A - maar in de loop der jaren zijn er heel wat andere landen aangehaakt die deze vaardigheden ook belangrijk vinden. De A-lympiade is van recenter datum dan de gewone olympiades, maar bestaat toch al weer zo'n dertig jaar. Tijd voor een terugblik! Spreker: Dédé de Haan.

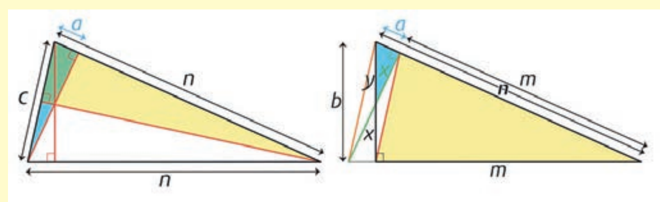
Het symposium vindt plaats in cursus- en vergadercentrum Domstad, Koningsbergerstraat 9, 3531 AJ te Utrecht. Kosten voor NVvW en NVORWO leden € 27,50, overigen € 32,50.
Inschrijven kan via de site van NVvW, klik bij 'Laatste Nieuws' of bij de Agenda op het kopje 'Competities en Competenties'.

WIS EN WAARACHTIG

Deze rubriek is een impressie van zaken die van belang zijn voor docenten wiskunde. Wilt u een wetenswaardigheid geplaatst zien, uw collega's op de hoogte brengen van een belangwekkend nieuwsfeit dat u elders heeft gelezen of verslag doen van een wiskundige activiteit? Stuur ons uw tekst, eventueel met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor bijdragen in te korten of niet te plaatsen. Bijdragen naar *wisenwaarachtig@nvvw.nl*

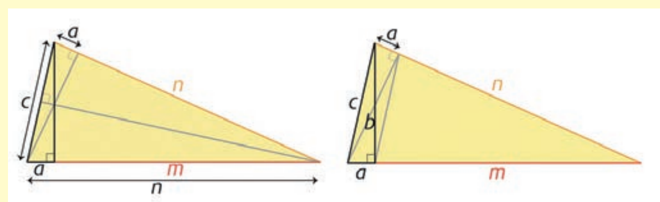
En weer een nieuw bewijs van de stelling van Pythagoras...

Nog steeds vindt men nieuwe bewijzen voor de stelling van Pythagoras. De Amerikaan Elisha Loomis verzamelde er in 1940 maar liefst 370. In 2002 verwerkte Bruno Ernst er 29 in zijn *De interessantste bewijzen voor de stelling van Pythagoras* (verschenen bij Epsilon) en in de vorige jaargang van *Euclides* gaf Simon Biesheuvel een mooi bewijs (jaargang 90, nr. 2). Een Amerikaanse econoom, Kaushik Basu van de Cornell University en de Wereldbank, gaf een bewijs gebaseerd op een interessante eigenschap van gelijkbenige driehoeken. Het bewijs in vier stappen:



figuur 1 Stap 1 Stap 2

1 Gegeven een gelijkbenige driehoek met loodlijnen (rood). De gele driehoek en de blauw/groene driehoek zijn gelijkvormig, dus $\frac{1}{2}c{:}n = a{:}c$, ofwel $c^2 = 2an$.
2 Gegeven een rechthoekige driehoek. De rode lijn is zó getekend, dat de gele driehoek gelijkbenig is. De oranje lijn is evenwijdig met de rode lijn. De groene lijn is een loodlijn en verdeelt de verticale zijde van de driehoek in twee delen met lengtes x en y. De oorspronkelijke driehoek en de blauwe driehoek zijn gelijkvormig, dus $n{:}m = y{:}x$. Deze twee vergelijkingen zijn te combineren tot $b^2 = an + am$.



figuur 2 Stap 3 Stap 4

3 Gegeven is een rechthoekige driehoek. Verleng de zijde met lengte a (rood) zó, dat de gele driehoek gelijkbenig is. Dezelfde hulplijnen als in (1) zijn grijs weergegeven. Op grond van (1) geldt: $c^2 = 2an = an + an = an + a(m + a) = an + am + a^2$.
4 Zelfde plaatje als in (3), maar nu met de hulplijnen als in (2). Wegens (2) geldt $b^2 = an + am$. De gelijkheid in (3) wordt hiermee herleid tot $c^2 = b^2 + a^2$, waarmee de stelling van Pythagoras is bewezen.
Bron: NRC 23 mei 2016

Booleaanse pythagoreïsche drietallenprobleem opgelost

Is het mogelijk de gehele getallen zó rood of blauw te kleuren dat de getallen van elk Pythagoreïsch drietal (a,b,c) niet alle drie dezelfde kleur krijgen? Deze vraag werd in de jaren tachtig van de vorige eeuw gesteld door de wiskundige Ronald Graham. Hij loofde 100 dollar uit voor degene die het probleem zou oplossen. Onlangs werd de prijs verdiend door de Nederlandse informaticus Marijn Heule, Oliver Kullmann en Victor Marek van de universiteit van Texas. Zij bewezen dat het mogelijk was om de getallen 1 t/m 7824 op deze manier te kleuren, maar dat het vanaf 7825 niet meer mogelijk is. Het computerbewijs omvat 200 terabyte, past op tweehonderd laptops en is ongeveer even groot als de hele inhoud van de Koninklijke Bibliotheek. Als u beschikt over voldoende rekentijd, dan kunt u het desgewenst checken: het bewijs is in gecomprimeerde vorm (68 gigabyte) te downloaden van Heules website. Volgens Heule is het monsterbewijs leuk voor de media, maar wiskundig gezien niet eens een echt hoogstandje: 'Ik wil laten zien dat je de mededeling dat je voor een gecompliceerde stelling geen tegenbewijs hebt kunnen vinden, ook helemaal voor anderen controleerbaar maakt. Door het te doen en ondanks de enorme omvang gewoon toegankelijk te maken.'
Bronnen: *De Volkskrant, 6 juni 2016, www.kennislink.nl/publicaties/de-tweedeling-stopt-bij-7824*

Nederlands team WiskundeOlympiade (Hong Kong)



Begin juni werd het team geselecteerd dat Nederland deze zomer vertegenwoordigde bij de Internationale Wiskunde Olympiade in Hong Kong (9 t/m 16 juli). Alle teamleden hebben al wedstrijdervaring op zak en hoopten nu hoge ogen te gooien op de meest prestigieuze internationale wedstrijd. In Valkenswaard vond eind mei de laatste trainings- en selectieweek plaats. Deelnemers aan deze selectieweek waren de winnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, die in vier eerdere rondes ruim 10.000 deelnemers achter zich lieten. De volgende zes leerlingen hebben zich na drie selectietoetsen geplaatst voor het Nederlandse team: Erik van Cappellen (17 jaar, Putten, 5 vwo, Johannes Fontanus College Barneveld), Wietze Koops (15 jaar, Meppel, 5 vwo, RSG Stad & Esch Lyceum Meppel), Levi van de Pol (14 jaar, Veenendaal,

3 vwo, Ichthus College Veenendaal), Reinier Schmiermann (14 jaar, Drunen, 5 vwo, Stedelijk Gymnasium 's-Hertogenbosch), Pim Spelier (16 jaar, Den Haag, 6 vwo, Christelijk Gymnasium Sorghvliet Den Haag), Gabriel Visser (18 jaar, Spijkenisse, 5 vwo, Stedelijk Gymnasium Schiedam)
Als winnaar van de aanmoedigingsprijs ging mee: Matthijs van der Poel (15 jaar, IJsselstein, 3 vwo, Christelijk Gymnasium Utrecht). Deze prijs is bestemd voor een jong aanstormend talent en wordt beschikbaar gesteld door het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht.
Bij de Benelux Wiskunde Olympiade eerder dit jaar hebben deze wiskundetalenten al laten zien wat ze in huis hebben. Levi, Reinier en Pim behaalden daar een zilveren medaille, terwijl Wietze, Gabriel en Matthijs een bronzen medaille wonnen.
Op de internationale olympiade viel het team weer in de prijzen:
Levi van de Pol: brons (21 punten)
Pim Spelier: brons (20 punten)
Gabriel Visser: brons (16 punten)
Wietze Koops: eervolle vermelding (15 punten)
Reinier Schmiermann: eervolle vermelding (15 punten)
Erik van Cappellen: eervolle vermelding (11 punten)
Bron: *www.wiskundeolympiade.nl*

Roy scoort 'onmogelijk' cijfer 12 op examen wiskunde

Een 12 als cijfer? Het klinkt niet logisch, zeker niet als het om het vak wiskunde B gaat. Toch is dat het cijfer dat Roy Clevis wellicht had moeten krijgen voor zijn examen wiskunde. De NSG-leerling uit Nijmegen vond de opgaven 'best wel te doen', hij scoorde een 10. Andere examenleerlingen hadden meer moeite met het examen. Daarom werd de norm landelijk met twee punten verhoogd. Resultaat voor Roy: een 12. De 12 komt niet in de boeken, want hoger dan een 10 scoren kan nou eenmaal niet. NSG-directeur onderwijs Martinette Selten: 'Zo'n ophoging van 2.0 is de hoogst mogelijke. Dat wil zeggen dat het eindexamen extreem moeilijk was. Roy haalt zelfs dan nul fouten. Dit maak je zelden mee.'
Roy was verbaasd. Nul onjuistheden in zijn wiskunde B-examen? 'Ik dacht dat ik een paar rekenfoutjes had gemaakt.' Of het uniek is in Nederland, is nog onbekend.
Roy blijft nuchter. 'Ach, ik heb altijd al een goed gevoel gehad voor cijfers.' En wel iets meer dan dat: 'In het examen moesten we bewijzen dat de ene hoek gelijk was aan de andere. Dat doe je aan de hand van stellingen. Dat kan lastig zijn. Waarom het gebeurt, weet ik niet, maar op een gegeven moment "zie" ik gewoon het antwoord.' Verder had Roy een prachtige lijst. 'Zevens voor Nederlands en Engels, verder achten en negens.' Hij wil door in de bètarichting, technische natuurkunde in Eindhoven.
Bron: De Gelderlander 18 juni 2016

SMART-finale Kangoeroewedstrijd

Dit jaar werd voor de derde keer de SMART-finale georganiseerd. De twintig beste deelnemers van groep 7 & 8 en van het vmbo-smart (deze laatste groep is nieuw dit jaar!) werden uitgenodigd om op donderdag 21 juni deel te nemen aan deze finale. In science-center Nemo streden uiteindelijk 59 leerlingen (20 uit groep 7, 21 uit groep 8 en 18 van het vmbo) voor een plaatsje bij de eerste drie van hun categorie. De finale werd gespeeld over twee rondes (één met 16 meerkeuzevragen en één met 8 open vragen). Dit zijn de prijswinnaars, alle deelnemers kregen dezelfde opgaven en de maximale score was 56 punten:



Groep 7:
1. Raven Staal uit Amsterdam met 45 punten
2. Hylke Hoogeveen uit Odijk met 42 punten
3. Emma van Klink uit Voorhout met 36 punten

Groep 8:
1. Andy Zhang uit Eindhoven met 49 punten
2. Keanu Metz uit Krommenie met 49 punten
3. Wietske de Vos uit Assendelft met 48 punten
   Nora Christine Baljè uit Groningen met 48 punten

Vmbo:
1. Marijn Borrenbergs uit Luyksgestel met 38 punten
2. Roy Pullen uit Hardenberg met 35 punten
3. Bjorn Klinkenberg uit Voerendaal met 34 punten
   Joost Oosterom uit Nieuwegein met 34 punten

Het gemiddelde in groep 7 was 30 punten, in groep 8 was dat 40 punten en 26 punten bij het vmbo. Volgend jaar wordt de finale hoogstwaarschijnlijk weer in museum Boerhaave in Leiden georganiseerd (als de verbouwing volgens planning verloopt).

Voor een foto-impressie (en de opgaven) kunt u terecht op website: http://www.w4kangoeroe.nl/
Bron: Martin Winkel, Stichting Wiskunde Kangoeroe, Nijmegen

HAVO B-EXAMEN

Gerrie Stuurman

Het examen kreeg een N-waarde van 1,5 en op het examenforum voor leerlingen vond 28% het zeer moeilijk. In dit artikel leest u hoe het de leerlingen van Gerrie Stuurman is vergaan en wat zij zelf van de opgaven vindt.

'U heeft ons goed voorbereid, maar ik weet niet of ik alles goed heb.' Dat was een uitspraak van één van mijn havo Wiskunde B-leerlingen. En zo heb ik dit examen ook ervaren. Na het uitdelen van de examens in de gymzaal, keek ik uiteraard direct het examen in. Bij de meeste opgaven dacht ik: 'Dat hebben we geoefend. Fijn!' Ik was blij dat de hoeveelheid tekst bij de opgaven beperkt was. Een goed teken. Zo zie ik het graag bij een wiskunde B-examen. Exact en algebraïsch oplossen zat er ook voldoende in.
Een betere indicatie van de moeilijkheidsgraad en de lengte krijg ik, als ik het examen zelf ga maken en met het correctiemodel vergelijk. Dan zie je de eerste 'haken en ogen' van het examen pas. En dan kan het nakijkwerk beginnen. En ook daarbij vallen weer zaken op waarvan ik denk: 'Mmmm. Moet ik dit nu echt fout rekenen? Is dit waar het om gaat bij een examen?' Ik kom daar later nog op terug. Gelukkig waren er ook genoeg opdrachten waarbij ik vlot het werk van mijn leerlingen kon nakijken, omdat ze het netjes hadden opgeschreven en het correctiemodel ook prettig te gebruiken was.

Meetkunde



figuur 1 De blokkendoos

De eerste context, *Blokkendoos*, was een leuke meetkundige toepassing (figuur 1). Bij deze opgave moesten de leerlingen de inhouds- en oppervlakteformules beheersen van onder andere balken en cilinders. En verder moesten ze een bovenaanzicht van een bouwsel tekenen. Op zich een context met prettige opgaven om mee te starten. Bij opgave 3 heb ik een kanttekening. De leerlingen moesten de totale oppervlakte uitrekenen van een figuur die eruitzag als een brug. Dit moest beantwoord worden 'in cm^2 nauwkeurig'. Uiteraard leer ik mijn leerlingen dat je bij voorkeur niet tussendoor moet afronden, maar ze willen toch graag weten met hoeveel decimalen ze minimaal door moeten rekenen. Bij deze opgave bleek dat leerlingen die met twee decimalen hadden gewerkt fout uitkwamen. Hun antwoord was 232 cm^2. Als je niet afrondde of met minimaal drie decimalen doorwerkte, dan kwam je uit op 231 cm^2. Helaas mochten we het antwoord '232 cm^2' niet goed rekenen. En dat terwijl bij opgave 1 leerlingen de waarde '250π' (= 785,398....) tussentijds mochten afronden op 785. Dat leverde bij deze opgave 'toevallig' hetzelfde antwoord op als in het correctievoorschrift staat. Voor mijn gevoel is dit niet consequent.

Algebra en grafische rekenmachine

De tweede context heette *Een wortelfunctie*. Een context met een mooie afwisseling tussen algebraïsch werk en oplossen met behulp van de grafische rekenmachine. Bij opgave 5 moest het tweede snijpunt van de grafieken van de wortelfunctie met een lineaire functie worden bepaald. Dit mocht met de grafische rekenmachine. Het viel mij op dat ik blijkbaar zoveel geoefend heb met het exact oplossen van allerlei vergelijkingen, dat een flink deel van mijn leerlingen deze opgave algebraïsch heeft opgelost en dat ging nog goed ook! Bij opgave 6, het laatste onderdeel van deze context, moest er een functievoorschrift worden opgesteld voor de afstand tussen twee grafieken. Van deze functie moest vervolgens met behulp van differentiëren het maximum worden gevonden. Ook een herkenbaar type opgave.

Periodieke functies

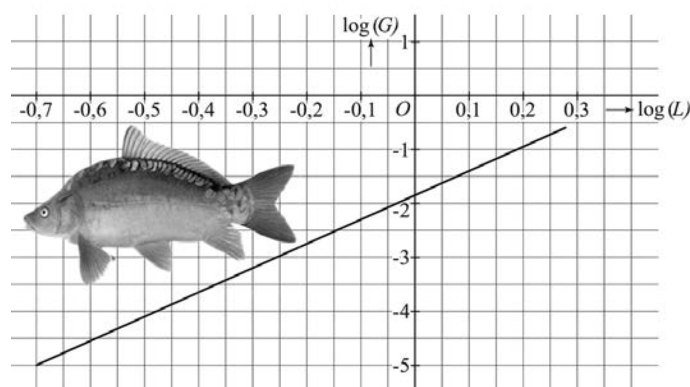
De context *Schijngestalten van de maan* is een mooie toepassing van een ander periodiek verschijnsel uit de natuur. Nu eens geen eb en vloed of daglengte, maar het 'maan'delijkse verloop van de vorm van het zichtbare gedeelte van de maan. Het type vragen was herkenbaar. Het 'addertje onder het gras' was hier het feit dat door het in de examenstand zetten van de rekenmachine, de instelling standaard naar 'degree' wordt gezet. In ieder geval had ik een paar leerlingen die dit niet rechtgezet hadden. Jammer! Op het examenforum van de NVvW is te zien dat opgave 9 de gemoederen het meest heeft beziggehouden. Zowel het aantal reacties als het aantal weergaven is bij deze opgave het hoogst. Het was inderdaad een opgave waarbij veel van mijn leerlingen niet precies alle stappen uit het correctiemodel opgeschreven

hadden. Het was lastig om te bepalen hoeveel punten je dan wel kon geven.

Differentiëren

Bij opgave 10 van de context *Gebroken functie en raaklijn* moest een gebroken functie worden gedifferentieerd. Toevallig leek deze functie heel veel op de functie waarmee ik in de laatste les voor het examen het differentiëren nog eens geoefend had. Bij opgave 11 moest de verhouding tussen de oppervlakten van het driehoekige deel en het trapeziumvormige deel van een rechthoek exact worden berekend. Voor het berekenen van beide oppervlakten was er een *x*-waarde van een punt op de grafiek van de gebroken functie en een raaklijn in de oorsprong gegeven. Het type opgave deed mij erg denken aan een vwo wiskunde B-examen. Het was een opgave die prima te doen was voor een havoleerling. Een mooie opgave!

Logaritmes



figuur 2 Grafiek bij de context *Karpers*

Bij de context *Karpers* kregen de leerlingen te maken met een grafiek waarbij beide assen logaritmisch waren (figuur 2). Een log-log-schaal dus. Het is een flink aantal jaren geleden dat er zo'n grafiek in het examen voorkwam. De variabelen, waartussen een machtsverband bestond, waren de lengte en het gewicht van karperlarven. Er moest met behulp van een gegeven een parameter worden berekend (opgave 13) en een verhouding tussen het gewicht van twee karperlarven van verschillend gewicht (opgave 14). Het antwoord op deze vraag moest in honderdtallen gegeven worden. Een aantal leerlingen heeft daarbij het onafgeronde antwoord 1110,59... afgerond naar $11,10 \cdot 10^2$. Het lijkt er op dat ze de aanwijzing hebben verward met iets uit de natuurkunde-examens. Tot slot moest de formule worden omgeschreven naar een log-vorm (opgave 15). Opgave 14 had in mijn klas de hoogste percentielscore (92%) en opgave 15 de laagste (16%). En dat binnen één context! Het omschrijven van formules met een logaritme er in, blijft lastig voor havoleerlingen. Als het iets minder abstract is, zoals een logaritmische vergelijking exact oplossen dan lukt dat best aardig. Maar het omschrijven van formules van de ene vorm in de andere met de log-rekenregels, dat is blijkbaar toch een 'abstractie'-stapje te hoog.

Ruimtemeetkunde

De één na laatste context had de prozaïsche titel: *Lichaam PSC.QRF*. Deze titel valt wat mij betreft in dezelfde categorie als de context *f boven g* uit het havo wiskunde B-examen van 2014, tijdvak 1. Het valt ook niet altijd mee om een goede titel voor een context te verzinnen. Wat mij betreft had de titel hier ook kunnen zijn: 'Nou vooruit, nog één keertje dan' of 'Ruimtemeetkunde! De ontknoping'. Goed, weer serieus. Bij de eerste opgave uit deze context moest de inhoud van een ruimtelijk figuur worden berekend. Eén van de manieren was om eerst de inhoud van een prisma uit te rekenen en daar dan de inhoud van twee dezelfde piramides af te trekken. Ook dit jaar geen afgeknotte kegel of afgeknotte piramide. En daar hadden we nog zo mee geoefend! Bij opgave 17 moest er een doorsnede worden getekend. En voordat de doorsnede getekend kon worden, moest er gerekend worden. Het viel de leerlingen niet mee om de doorsnedes te kiezen waarmee zij de juiste lengtes konden uitrekenen. Er werd volop ge'Pyhthagoras't, maar dat leidde regelmatig tot lengtes van foutieve zijden.

Bij de laatste context kwamen exponentiële functies en transformaties aan bod. Bij opgave 18 moest er exact worden opgelost. Bij de laatste twee opgaven ging het om transformaties. Ook bij deze laatste context hebben mijn leerlingen nog heel behoorlijk gescoord. Bij opgave 20 was het duidelijk dat de tijd om was. Er is nog snel het nodige op papier gezet, maar niet compleet en zeker niet foutloos. Mijn conclusie is dat het examen goed te maken was voor leerlingen, maar dat het iets te lang was.

'EXAMEN WAS GOED TE MAKEN VOOR LEERLINGEN, MAAR HET WAS IETS TE LANG.'

Conclusies

Hieronder nog een aantal punten uit mijn analyse van dit examen:

- Een goede verdeling over de verschillende type functies: een lineaire functie, een machtsfunctie, een gebroken functie, een exponentiële functie en een periodieke functie kwamen in dit examen voor.
- Er moest twee keer gedifferentieerd worden. In beide gevallen was de kettingregel nodig. De productregel was dit jaar niet nodig. Ik vermoed dat dit te maken heeft met het feit dat de productregel niet in het nieuwe examenprogramma zit.

- Er hoefde geen uitslag te worden getekend van een meetkundig figuur.
- Het aantal keren dat er exact of algebraïsch gewerkt moet worden in het examen is redelijk constant de laatste jaren. In 2014 tijdvak I was er een uitschieter waarbij er acht keer exact berekend moest worden. De laatste jaren is dit ongeveer drie keer per examen. Verder zijn er twee of drie opgaven waarbij algebraïsch gerekend moet worden. Zo'n tien keer per examen mag een antwoord met de rekenmachine worden berekend. Van die tien keer wordt er ongeveer zes keer een afrondinstructie gegeven.

Op het examenforum voor leerlingen op scholieren.com/eindexamens2016 was ook te lezen dat het examen goed te doen was voor de meeste leerlingen. Op deze site kunnen leerlingen hun stem uitbrengen wat ze van de moeilijkheidsgraad van het examen vonden. Dit jaar was de stemming als volgt: Erg makkelijk – 10%, gemakkelijk – 13%, gemiddeld – 24%, moeilijk – 25% en erg moeilijk – 28%. Laten dit nu exact dezelfde percentages zijn als vorig jaar! Een opvallend feit dat ook hier genoemd werd, was de verkeerde eindtijd op het examen en het feit dat dit pas na de start van het examen via een mailing van Examenblad.nl gecommuniceerd werd. Van paniek was bij mijn leerlingen echter geen sprake. Ze waren tenslotte 'goed voorbereid'.

Over de auteur

Gerrie Stuurman is docente wiskunde op SG Huizermaat te Huizen. E-mailadres: *gstuurman@gsf.nl*

PILOTEXAMEN WISKUNDE A

Erik van Barneveld

Toetsvragen kunnen op veel verschillende manieren geanalyseerd worden. Achteraf door naar cijfermatige resultaten te kijken, vooraf vooral op basis van intuïtie en ervaring. Erik van Barneveld beschrijft de manier van analyseren die in zijn sectie wordt gebruikt en vergelijkt de pilotexamens van dit jaar en vorig jaar.

Achtergrond

Toen het examen werd afgenomen, was ik als surveillant aanwezig in de examenzaal. Dat gaf mij de kans om het examen even globaal door te nemen. Mijn eerste indruk was dat het examen goed maakbaar is. Tijdens de examenbespreking kwam naar voren dat een aantal pilotdocenten dezelfde indruk had, maar dat er ook pilotdocenten waren die het examen – zeker in vergelijking met het reguliere vwo wiskunde A-examen – tamelijk complex vonden. Dat roept de vraag op welke onderdelen van het examen als makkelijk of moeilijk bestempeld zouden kunnen worden. Deze vraag is relevant voor docenten die dit schooljaar zijn gestart met het nieuwe examenprogramma. Enig inzicht in de moeilijkheidsgraad van verschillende examenonderdelen kan natuurlijk achteraf worden verkregen door te kijken naar de behaalde p-waarden op de verschillende onderdelen (zie hiervoor de toets en itemanalyses op www.cito.nl). In dit artikel beschrijf ik hoe er – los van behaalde p-waarden - binnen de vakgroep op mijn school gekeken wordt naar de moeilijkheidsgraad van schriftelijke toetsen. Deze methode kan niet alleen achteraf worden gebruikt, maar juist ook vooraf bij het opstellen van deze toetsen.

Hoe moeilijk is een schriftelijke toets?

Sinds enige tijd wordt er bij ons op school gewerkt met RTTI (zie www.rtti.nl). Dit is een middel om per leerling per vak verschillende cognitieve niveaus van leren in kaart te brengen. Idealiter gaat RTTI binnen de school werken als een motor voor onderwijsontwikkeling. De vier letters van de afkorting RTTI staan voor vier cognitieve niveaus. De R staat voor reproductie, T1 voor trainingsgerichte toepassing, T2 voor transfergerichte toepassing en I voor inzicht. Binnen de vakgroep wiskunde hebben wij vastgesteld dat voor ons vak het onderscheiden van vier cognitieve niveaus niet noodzakelijk is. Wij voegen doorgaans de eerste twee categorieën (R en T1) samen en ook de laatste twee categorieën (T2 en I). Zodoende werken wij met twee cognitieve niveaus: T1 en T2, die wij kortweg aanduiden met standaardopgaven (T1) en niet-standaard-

opgaven (T2). Om te bepalen of een vraag een standaardopgave betreft of niet, baseren we ons enerzijds op de syllabus vwo wiskunde A 2018 waarin een onderscheid wordt gemaakt tussen parate vaardigheden en productieve vaardigheden (zie www.examenblad.nl) en anderzijds op het gegeven onderwijs.
In de les proberen we over te brengen welke opgaven standaardvragen zijn en welke opgaven wij als niet-standaard beschouwen. Wij kiezen daarbij voor een beperkte set standaardopgaven en proberen expliciet aandacht te besteden aan de vraag hoe leerlingen niet-standaardopgaven zouden kunnen aanpakken.
Het is een begrijpelijk misverstand dat T1-vragen makkelijker zouden zijn dan T2-vragen. Het RTTI-verhaal straalt iets uit van een hiërarchie in de vier cognitieve niveaus. Reproductie lijkt te staan voor het laagste niveau en inzicht voor het hoogste niveau. Als collega's binnen de vakgroep wiskunde waren wij het er snel over eens dat bij ons vak standaardvragen ook moeilijk kunnen zijn en dat niet-standaard-vragen ook makkelijk kunnen zijn. Om een goede indruk te krijgen van de moeilijkheidsgraad van een toets is het volgens ons daarom ontoereikend om uitsluitend te kijken naar de verhouding T1/T2-vragen en de bijbehorende punten. Volgens ons dient er een tweede dimensie toegevoegd te worden; deze dimensie noemen wij de 'complexiteit'. Bij de beoordeling van de complexiteit van een vraag spelen vooral de volgende factoren een rol:

- het aantal denkstappen dat nodig is;
- hoe vaak de betreffende denkstappen door leerlingen gebruikt worden;
- hoe herkenbaar de probleemsituatie is;
- welke reken- en/of algebraïsche vaardigheden nodig zijn.

We scoren de complexiteit op een vijfpuntsschaal. Score 1 staat voor zeer makkelijk; 2 voor makkelijk; 3 voor gemiddeld; 4 voor moeilijk; 5 zeer moeilijk. In de praktijk worden scores 1 en 5 niet veel gebruikt en dan resteert een driepuntsschaal: makkelijk, gemiddeld en moeilijk.
In dit artikel zal ik deze driepuntsschaal hanteren.
Het mag duidelijk zijn dat het scoren van beide dimensies (T1 of T2 én de mate van complexiteit) van een vraag geen exacte wetenschap betreft. Desalniettemin constateren wij dat binnen onze vakgroep, die bestaat uit een tiental zeer verschillende docenten, met hierboven beschreven aanpak vaak snel consensus bestaat over de moeilijkheidsgraad van de afzonderlijke onderdelen van een schriftelijke toets en daarmee ook over de toets in zijn geheel.

> 'HET IS EEN BEGRIJPELIJK MISVERSTAND DAT T1-VRAGEN MAKKELIJKER ZOUDEN ZIJN DAN T2-VRAGEN.'

Examen 2016

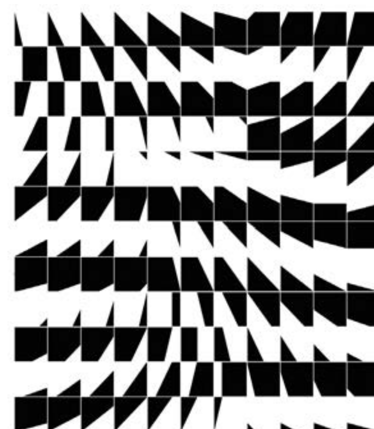
Als ik met de hierboven beschreven aanpak het examen van 2016 bekijk, dan kom ik tot de volgende tabellen.

	Aalscholvers en vis				Fietsen en energie				Elvis			
Onderdeel	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Max. punten	3	4	3	4	4	4	4	5	4	3	5	4
T1 / T2	T1	T1	T1	T1	T1	T1	T2	T2	T2	T1	T1	T2
Complexiteit	2	3	3	4	2	3	3	3	3	2	4	4

	Geocachen				Golvende muur				Zwart-wit
Onderdeel	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Max. punten	3	4	2	4	2	5	3	4	7
T1 / T2	T1	T1	T2	T1	T1	T1	T1	T2	T2
Complexiteit	2	4	2	3	2	3	3	3	4

	Makkelijk	Gemiddeld	Moeilijk	Totaal
T1	19	28	16	63
T2	2	21	14	37
Totaal	21	49	30	100

De tabel laat zien dat bijna 40% van de te behalen punten verdiend moest worden met niet-standaardvragen (T2). Ongeveer 30% van de te behalen punten moest met moeilijke vragen worden gehaald. Ongeveer 15% van de te behalen punten betrof moeilijke niet-standaardvragen. Het is lastig om uitsluitend op basis van deze percentages iets te zeggen over de moeilijkheidsgraad van het examen. Het wordt gemakkelijker als we de moeilijkheidsgraad van twee examens vergelijken door voor beide examens zo'n tabel op te stellen.



figuur 1 De opgave Zwart Wit gaat over een patroon uit de serie Tide van Wim Crouwel

Vergelijking met 2015 en eerdere jaren
Voor het examen van 2015 kom ik tot de volgende tabellen.

	Piramiden				Kosten van betalingsverkeer				Station Amersfoort			
Onderdeel	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Max. punten	3	4	3	4	4	4	3	4	3	3	4	3
T1 / T2	T1	T1	T2	T2	T1	T2	T1	T2	T1	T2	T2	T2
Complexiteit	2	3	2	4	2	3	3	4	2	3	4	3

	Bevingen in Japan				Snoeken				Number Rumba
Onderdeel	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Max. punten	5	3	4	4	4	3	3	4	7
T1 / T2	T1	T1	T1	T2	T1	T1	T1	T2	T2
Complexiteit	3	3	4	4	4	3	4	3	4

	Makkelijk	Gemiddeld	Moeilijk	Totaal
T1	13	23	14	50
T2	4	18	29	51
Totaal	17	41	43	101

Het examen van 2015 laat in beide dimensies een ander beeld zien dan het examen van 2016. In 2015 moest ongeveer de helft van het aantal te behalen punten behaald worden met niet-standaardvragen. Ongeveer 40% van de te behalen punten betrof moeilijke vragen. Bijna 30% van de punten moest behaald worden met moeilijke niet-standaardvragen.

Conclusie en aanbevelingen
Volgens mijn inschatting was het examen 2016 makkelijker dan het examen in 2015. Dit wordt voor een deel verklaard doordat in het examen van 2016 relatief meer punten konden worden behaald met standaardvragen. Een ander deel van de verklaring is dat de vragen in het examen 2016 (en de punten die ermee verdiend konden worden) minder complex waren dan in 2015. Daarnaast valt op dat het examen van 2016 drie onderdelen bevat waar specifieke algebraïsche vaardigheden worden getoetst (maximaal 12 punten), wat beduidend minder is dan in 2015.

Voor docenten die voor het eerst het nieuwe programma doceren is het raadzaam kennis te nemen van de behaalde p-waarden op de verschillende onderdelen van de oude examens en deze informatie te gebruiken bij het opstellen van hun schoolexamens. Tevens verdient het aanbeveling om bij het opstellen van schoolexamens niet uitsluitend te kijken naar het onderscheid standaardvragen en niet-standaardvragen, maar ook rekening te houden met de complexiteit van de verschillende vragen. In de voorbereiding van schoolexamens en het centrale examen is het raadzaam om expliciet aandacht te besteden aan het herkennen van standaardvragen en het trainen om deze vragen snel te kunnen maken. Daarnaast is het van belang dat leerlingen leren hoe zij niet-standaardvragen aan kunnen pakken.

Over de auteur
Erik van Barneveld is werkzaam als docent op de Goudse Scholengemeenschap Leo Vroman in Gouda. E-mailadres: *E.vanBarneveld@gsgleovroman.nl*

VWO WISKUNDE B-PILOTEXAMEN

Ilone Dekkers

Het wiskunde B-pilotexamen kreeg de hoogste N-term (2,4) van álle vwo-examens van het eerste tijdvak. Is het daarmee dan niet zo'n goed examen? Ilone Dekkers vindt van niet. In dit artikel leest u waarom, nadat zij de vernieuwende opgaven in het examen heeft geanalyseerd.

Inleiding

De vernieuwde wiskunde is dit jaar landelijk van start gegaan. Iedereen moet dit al hebben gemerkt aan nieuwe hoofdstukken in de nieuwe edities van de boeken. Het eerste jaar waarin bij de veelgebruikte methodes, lijnen (uitgebreider dan voorheen) en vectormeetkunde (*Moderne Wiskunde*) en inverse functies, limieten en verschillende meetkundeonderdelen (*Getal & Ruimte*) al aan bod zijn gekomen. Daarnaast moest op alle GR's de examenstand worden gebruikt, dan wel een 'reset' van de apparaten worden toegepast. Bijna terug naar vóór de invoering van deze toestellen, want de toegevoegde waarde voor met name wiskunde B is erg minimaal. Dit jaar werd alweer voor de vijfde keer het pilotexamen gemaakt voor de zogenoemde doorloopscholen die mee hebben gedraaid binnen deze pilot met vernieuwingen. Het examen bestond uit zestien vragen, verdeeld over acht opgaven. Drie opgaven hiervan bestonden zelfs maar uit één vraag. In totaal waren er maximaal 79 punten te behalen, tegenover zeventien vragen en 77 te behalen punten bij het reguliere examen. Acht vragen hiervan waren gelijk in beide examens, soms met net iets andere informatie of vraagstelling.

Vectormeetkunde

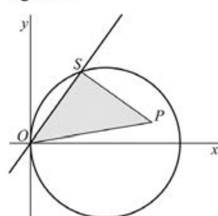
De eerste twee opgaven *Kettinglijn* en *Automotor* waren identiek aan het reguliere examen, behalve dat vraag 2 (de loshangende kabel die de grond al dan niet raakt) niet in het pilotexamen stond. De derde opgave *Een driehoek draaiend over een cirkel* was een pilotopgave, zie figuur 1.

Een driehoek draaiend over een cirkel

Gegeven is de cirkel met vergelijking $(x-1)^2+y^2=1$. Voor elke waarde van a is gegeven de lijn met vergelijking $y=ax$. Elk van deze lijnen snijdt de cirkel in twee punten, namelijk in O en S. De coördinaten van S zijn afhankelijk van a.

De vector $\vec{SP}$ is het beeld van $\vec{SO}$ bij een rotatie om S over $90°$. Zie figuur 1, waarin ook driehoek OPS is weergegeven.

figuur 1



Voor de coördinaten van P geldt:

$$x_P=\frac{2a+2}{a^2+1} \quad \text{en} \quad y_P=\frac{2a-2}{a^2+1}$$

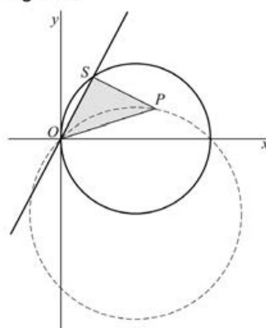
7p **6** Bewijs dat deze formules voor x_P en y_P correct zijn.

figuur 1

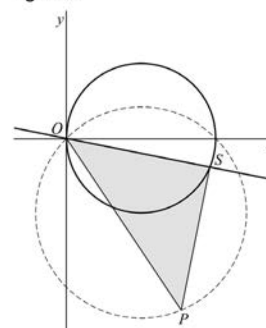
De eerste vernieuwing kwam terug in vraag 6: vectormeetkunde met loodrechte toepassing hiervan. De tweede alinea is voor niemand misleidend geweest, want het is logisch om met $\vec{OS}$ te gaan rekenen: $\vec{OP}=\vec{OS}+\vec{SP}$, waarbij $\vec{SP}=\vec{OS_R}$ en dus de kop-staart-methode. Toch blijkt uit de p-waarde van 0,38 in mijn klas, dat leerlingen dit moeilijk vinden. Er wordt veel op geoefend, want het komt (bijna) elk jaar terug, maar waarschijnlijk is de parameter een 'afschrikgegeven' geweest. Daar moet je immers ook nog mee overweg kunnen om de vraag tot een goed einde te brengen.

Bij elke waarde van a hoort een positie van P. In figuur 2 en figuur 3 is voor twee waarden van a deze positie getekend. Als a varieert, beweegt P over een cirkel door O. Deze cirkel is gestippeld getekend.

figuur 2



figuur 3



figuur 2

Vraag 7, zie figuur 2, bleek veruit de moeilijkste te zijn van het examen, getuige de p-waarde van 0,19. De helft van de leerlingen had geen flauw idee waar ze moesten beginnen en haalde dus geen punten voor deze vraag; niemand scoorde 5 punten volledig.
Er zijn verschillende aanpakken mogelijk. In het CV wordt een aanpak uitgewerkt door de coördinaten van P op de x-as en de y-as te berekenen. Samen met O zijn dit drie punten die op de cirkel liggen en met behulp van het snijpunt van de middelloodlijnen kan de vergelijking van de cirkel verder worden opgesteld. In het nieuwe programma komt deze aanpak echter maar summier aan bod. Geen van mijn leerlingen gebruikte dan ook deze manier. Deze zelfde drie berekende punten kunnen ook met Thales in verband worden gebracht, want er zit een rechte hoek bij S. Daarmee ligt de cirkel ook vast.

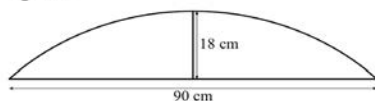
Aangezien deze vraag aansluit bij de vorige, blijft de gedachtegang bij leerlingen toch veelal hetzelfde: 'We moeten iets met de grijze driehoek gaan doen.' Aangezien de getekende kleine cirkel symmetrisch is in de *x*-as en *S* half is gedraaid als deze de *x*-as snijdt, geldt dat ook *P* half is gedraaid over de gearceerde cirkel. Hierdoor is *OP* de middellijn en ligt de cirkel vast. Deze aanpak stond echter niet in het CV vermeld, terwijl dit juist een mooi voorbeeld van een denkactiviteit is! De toelichting bij de weinige leerlingen die dat zo deden was vaak niet volledig. Het geven van goede en sluitende omschrijvingen is een hele kunst.
Vraag 8 is een makkelijke. Het blijft echter lastig dat leerlingen vragen los van elkaar moeten zien. De stress van vraag 6 en 7 is duidelijk merkbaar, want sommigen slaan daardoor vraag 8 zelfs over. De fout die de meesten wel maken is dat bij de *abc*-formule wordt vergeten om beide antwoorden te noteren om daarna met een toelichting de juiste conclusie te trekken over het daadwerkelijk goede antwoord.

Filteren van informatie

De volgende opgave was *Snelheid op een baan*. Deze zat ook in het reguliere examen, maar met het verschil dat in het pilotexamen de formule om de snelheid te berekenen in een punt op die baan niet in de inleidende tekst stond.

De metselaar vraagt aan de timmerman om een metselboog te maken. De breedte moet 90 cm worden en de hoogte 18 cm. In figuur 3 is het vooraanzicht van de metselboog met de genoemde maten weergegeven.

figuur 3



De bovenrand van de metselboog is een deel van een cirkel. Om de metselboog te kunnen maken, moet de timmerman de straal van deze cirkel berekenen.

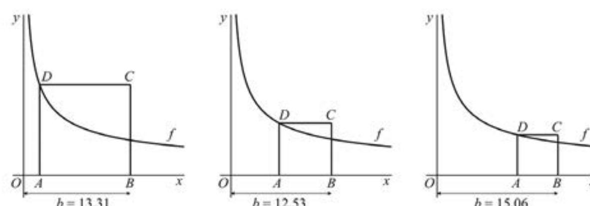
5p **10** Bereken algebraïsch deze straal. Rond je antwoord af op een geheel aantal cm.

figuur 3

De opgave *Metselboog* begon met een inleidende tekst over een metselaar die cirkelbogen boven een deur of raam moest metselen. Een timmerman maakt daarvoor een mal: de metselboog. Het filteren van informatie is aan wiskunde B-leerlingen wel besteed, want je hebt enkel het plaatje en de bijbehorende vraag nodig, zie figuur 3.
Een mooie vraag, maar het is 'alles of niets'. Kom je op het idee om de hele cirkel te tekenen, de straal erin te zetten (recht naar boven en naar een van de punten van de mal) en Pythagoras te gebruiken, dan zijn de punten snel verdiend. Waarom dan 5 punten voor deze vraag? De uitwerking is zo eenvoudig dat 3 punten al volstaat. Deze 5 punten staan écht niet in verhouding met andere vragen waarbij veel meer van de leerlingen verlangd wordt voor hetzelfde aantal punten! Leerlingen zijn bij wiskunde B tevens zo gewend om exacte antwoorden te geven, wat hier ook mooi uitkomt, dat een enkeling vergeet af te ronden.

In figuur 2 zijn enkele mogelijke situaties voor vierkant *ABCD* getekend.

figuur 2



Bij de getekende situaties is de afstand van punt *B* tot de oorsprong aangegeven. Deze afstand *b* hangt af van *a*, de *x*-coördinaat van *A*. Als *a* vanaf 0 toeneemt, neemt *b* eerst af en vervolgens weer toe. Er is dus een waarde van *a* waarvoor *b* minimaal is.

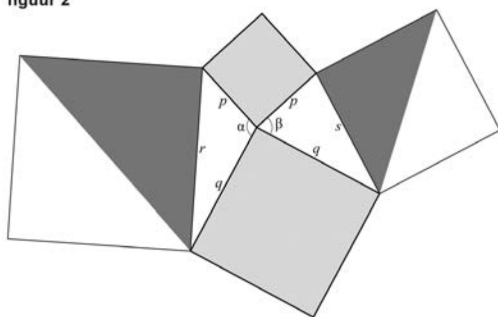
5p **12** Bereken exact de minimale waarde van *b*.

figuur 4

'Denkactiever'

De opgave *Vierkant bij een grafiek* (figuur 4) begint hetzelfde als bij het reguliere examen: met een omwentelingslichaam van de functie $f(x) = 16/\sqrt{x}$. Ook de inleidende tekst voor de vraag is gelijk. De vraag zelf echter niet. Regulier krijgt namelijk nog de extra informatie via de tussenvraag om eerst *b* uit te drukken in *a*. De gedachte is om deze vraag 'denkactiever' te maken. Daardoor wordt de vraag nu aanzienlijk moeilijker. Toch was ik erg tevreden over mijn leerlingen, want ik hoorde van andere doorloopscholen dat deze vraag niet overal even goed is gemaakt.
Limietpunt, zie het examen op de website, begint met twee makkelijke vragen. Vraag 13 is weer een 'alles of niets' vraag, want sommigen weten helaas toch niet wat ze moeten doen bij het woord inverse. Vraag 14 is het beste gemaakt in mijn klas; 'rechttoe rechtaan' rekenwerk. Limieten is een vernieuwend onderdeel. Vanwege de parameter toch moeilijk en daardoor slecht gemaakt. Er werd veel gegoocheld zonder een goed stappenplan op te stellen en gestructureerd daarmee aan het werk te gaan. Veel leerlingen kwamen in tijdnood, waardoor de laatste opgave *Vier vierkanten* (zie figuur 5) niet optimaal gemaakt is. Met behulp van twee keer de cosinusregel en de symmetrie-eigenschappen van een cosinusgrafiek kon deze vraag makkelijk bewezen worden. De meeste leerlingen strandden bij het wiskundig opschrijven van de vraag, dat al 1 punt gaf, en het noteren van de cosinusregels met de juiste letters. De helft van

'ZELFS GOEDE LEERLINGEN HEBBEN TOT AAN HET EINDE ZITTEN ZWOEGEN.'



In figuur 2 zijn de vierkanten met zijden p en q lichtgrijs gekleurd; van elk van de vierkanten met zijden r en s is de helft donkergrijs gekleurd.

6p 16 Bewijs dat de totale oppervlakte van de lichtgrijze delen gelijk is aan de totale oppervlakte van de donkergrijze delen.

figuur 5

de punten waren daardoor snel verdiend, zonder dat er daadwerkelijk iets mee was gedaan. Zie vraag 10 waar deze onevenredige verhouding ook al naar voren kwam!

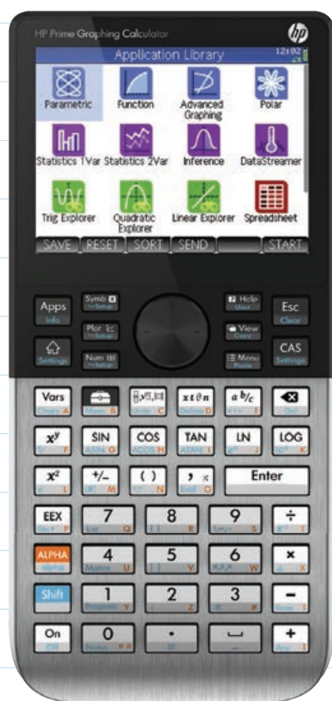
Reflectie

Het examen was erg (te?) lang! Dit kwam ook in de examenbespreking direct naar boven. Zelfs goede leerlingen hebben tot aan het einde zitten zwoegen. Hardwerkende leerlingen vallen door de mand, onder andere omdat er veel blikwisselingen nodig waren tussen de hoeveelheid verschillende vragen. Dit vergt enig denkwerk, maar daar was geen tijd voor.
Het lastige aan de vernieuwingsslag is dat er meer denkstappen gemaakt moeten worden, wat nou eenmaal meer tijd kost. Dit gaat ten koste van de hoeveelheid vragen die gesteld kunnen worden. Daarbij komt ook nog kijken dat er veel geleerd wordt in drie jaar bovenbouw en dat kan nooit evenredig getoetst worden.
Ik heb er als docent zelf bijna anderhalf uur over gedaan om het werk netjes en uitgebreid te maken, dan weet je dat het voor een leerling te lang is ...
Opvallend was het ontbreken van een vraag waarbij het manipuleren met goniometrisch formules aan bod kwam. Een onderdeel dat toch elk jaar terugkomt, de leerlingen moeilijk vinden en ik veel met ze heb geoefend. Het bepalen van een oppervlakte met behulp van een integraal zit er toch ook meestal in, maar we moesten het dit jaar doen met alleen een omwentelingslichaam.
De exponentiële functie met *e* als groeifactor was meteen de openingsopgave. De functie was zodanig opgebouwd dat het geen gemakkelijke binnenkomer meer genoemd kan worden, want het rekenwerk was aanzienlijk. Wederom, net als vorig jaar, geen vraag met een logaritmische of exponentiële functie met een andere groeifactor. Vanwege de reset op de GR moesten alle soorten formules, die leerlingen er voorheen inzetten, nu écht geleerd worden. Met als gevolg dat, als je een formule niet goed geleerd had, je ook meteen alle punten voor een vraag kwijt bent.
Toch vond ik het, als docent, een heel mooi examen. Er zat voldoende spreiding in de soort vragen, als het gaat om de geleerde stof. Ook al weet je dan dat het voor een leerling betekent dat het pittig zal zijn. Er was ook een goede verdeling in het aantal parameters dat in de vragen voorkwam. Voorgaande jaren werd hierin namelijk wel eens doorgeschoten en zaten ze in ruim de helft van alle vragen. Alle vragen zijn heel goed om op te nemen in een examen, maar dan toch liever in verschillende examens en niet in één.
De eerste resultaten waren niet erg hoopgevend. Tijdens de bespreking kwam naar voren dat het lastig werd om gemiddeld per klas de helft van het totaal aantal te behalen punten te behalen. Dit blijkt ook uit de definitieve N-term van een schokkende 2,4. Dit geeft wel een erg vertekend beeld bij mijn klas, want dat is één vol punt boven het schoolexamengemiddelde. Of zal ik dan maar zeggen 'goed voor mijn discrepantie'...
Stof tot nadenken en wellicht verbetering! Benieuwd wat tijdvak 2 ons gaat brengen en voor volgend jaar het allerlaatste pilotexamen.

Over de auteur

Ilone Dekkers is docente wiskunde bovenbouw aan het Peellandcollege in Deurne. E-mailadres: *dei@ivo-deurne.nl*





New Body & New Brain

HP Prime



Wilt u meer weten over de krachtigste rekenmachine voor uw leerlingen?

Online support voor Noordhoff en Malmberg beschikbaar!

En voor een vergelijkbare prijs!

- HP Prime; een krachtige grafische rekenmachine met meer rekenkracht en geheugen dan welke andere machine dan ook.
- Nieuwe consistente menustructuur met krachtige educatieve applicaties op een touchscreen: het is tenslotte 2016.
- Examenmode op de Prime betekent 1 knop indrukken. Binnen een paar tellen een examenlokaal in de juiste CvTE examenstand.
- HP Prime wordt altijd geleverd inclusief gratis emulator (dus ook voor uw leerlingen)!



Voor meer informatie en ondersteuningsmaterialen voor in de klas gaat u naar:

www.hp-prime.nl

Voor een docentenworkshop, demo-units of een schoolofferte neemt u contact op met **info@hp-prime.nl**

VWO WISKUNDE B-EXAMEN: EEN ERG ONPLEZIERIGE ERVARING

Rob van Oord

Dat het vwo wiskunde B-examen dit jaar heel anders was dan vorig jaar blijkt uit de vele reacties op het forum van de NVvW en uit de N-score van maar liefst 2,0. Rob van Oord belicht een aantal knelpunten in het examen.

Na mijn pensioen vond ik het een uitdaging om twee examenklassen voor het examen klaar te stomen, die in de jaren hiervoor bijna geen les hadden gehad. In een half jaar heb ik geprobeerd het niveau naar een hoger peil te tillen. De cijfers van de schoolexamens wezen in de goede richting. Elke week twee examenopgaven oefenen. In elke toets nam ik een van de behandelde examenopgaven op, zij het in iets gewijzigde vorm... Maar vooral geprobeerd de cultuur van 'huiswerk maak je in de les' om te buigen tot 'in de les geef ik uitleg, leg ik verbanden, laat ik vaardigheden zien die je moet beheersen, en huiswerk maak je thuis'. Toen kwam het examen.

Er lekker inkomen?

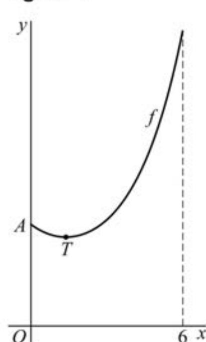
Ik had de leerlingen erop gewezen dat een examen altijd begint met een opgave waarmee je er lekker in komt. Een functie, toppen, buigpunten of iets met raaklijnen. Wat differentiëren, een vergelijking oplossen, een integraal, kortom het testen van enkele basisvaardigheden analyse. Dat hadden we ook veel geoefend in het laatste hoofdstuk van *Getal & Ruimte*. Ik verwachtte dan ook een opgave met een hogeregraads functie, bijvoorbeeld $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 1)(x + 1)$ of met een wortel ($f(x) = x\sqrt{6x - x^2}$) of een breuk ($f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$). Iets met e-machten of ln(x) verwachtte ik later in het examen. De eerste opgave ging echter meteen al over e-machten, zie figuur 1.

Kettinglijn

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + 2e^{-\frac{1}{2}x} + 1\frac{1}{2}$.
In figuur 1 is de grafiek van f, een zogenaamde kettinglijn, op het domein $[0,6]$ getekend.
Punt T is het laagste punt van de grafiek en punt A is het gemeenschappelijke punt van de grafiek met de y-as.

De x-coördinaat van T is ongeveer 1,4.

figuur 1



figuur 1

'Hm', dacht ik, 'die $e^{-\frac{1}{2}x}$ kan wel eens voor problemen gaan zorgen'. Maar goed, we hadden veel geoefend met negatieve exponenten die eigenlijk op een breuk wijzen. Dan kun je met $e^{\frac{1}{2}x} = p$ en $e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{p}$ een eind komen. In plaats van te starten met: 'Bereken exact de waarde van de x-coördinaat van T', wordt de leerling eerst verteld dat die waarde ongeveer gelijk is aan 1,4. Dit kan al tot paniek leiden. Waarom staat dat er bij? Maar goed, vol enthousiasme wordt er gedifferentieerd. Toch loopt twee derde van mijn leerlingen vast op die vergelijking $\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x} = 0$. Een veeg teken. Ook al weet je dat er ongeveer 1,4 uit moet komen.
Vraag 2 gaat over de lengte van een kromme.

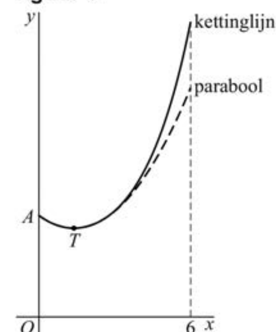
Vrijwel iedereen kent de formule $L = \int \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$.

Maar zorgvuldig intikken van Y1 = √(1+(1/4*e^(1/2*x)–e^(-1/2*x))^2) is geen lekker algebraïsch werkje. Een kwart van mijn leerlingen haalt niet het maximale aantal van 5 punten. Ik kan me voorstellen dat het gevoel van 'er lekker in te zitten' nog ontbreekt...
Dan komt vraag 3 (zie figuur 2).

In figuur 3 zijn de grafiek van de functie f en de parabool door A met top T getekend.
In deze figuur is te zien dat de parabool de kettinglijn aanvankelijk goed benadert, maar dat voor grotere waarden van x de benadering minder goed wordt.
Van de parabool door A met top T kan een vergelijking van de vorm $y = a(x - b)^2 + c$ worden opgesteld.

3 Bereken de waarde van x waarvoor het (verticale) hoogteverschil tussen de kettinglijn en deze parabool gelijk is aan 1. Rond je antwoord af op één decimaal.

figuur 3



figuur 2

Veel leerlingen zien wel dat de top (1,4; 3,5) is. Maar de topformule van een parabool, $y = a(x - b)^2 + c$ wordt niet herkend. Het is lesstof uit klas 3 en 4. Met $3,5 = a(1,4 - b)^2 + c$ kom je niet veel verder. Ook niet als je berekend hebt dat het snijpunt met de y-as (0, 4) is.
Leerlingen doen verwoede pogingen om de formule van de parabool te vinden. Anders kunnen ze immers de vergelijking $f(x) - y(\text{parabool}) = 1$ ook niet oplossen. Mocht je dan toch een formule gevonden hebben, dan moet je Y1 =

$$\tfrac{1}{2}e \wedge (\tfrac{1}{2}x) + 2e \wedge (-\tfrac{1}{2}x) + 1\tfrac{1}{2} - (\frac{1}{2\ln^2(4)}(x - \ln(4))^2 + 3,5)$$

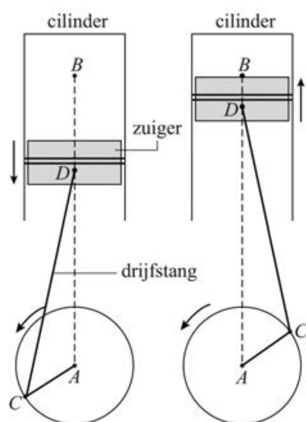
op de GR invoeren, of voor wie alvast met afgeronde waarden durft te werken: Y1 =

$$\tfrac{1}{2}e \wedge (\tfrac{1}{2}x) + 2e \wedge (-\tfrac{1}{2}x) + 1\tfrac{1}{2} - (0,260(x - 1,4)^2 + 3,5)$$

Dit past niet op één regel binnen je schermpje. Bij de huidige GR TI 84 PLUS (*silver edition*) kun je niet meer de gehele ingetikte formules zien. Je moet scrollen om te kijken of je wel alle haakjes goed gezet hebt. Deze opgave was dodelijk voor de meeste van mijn leerlingen. Twee leerlingen halen de maximumscore van 6, maar meer dan 60% haalt slechts een score van 0 of 1.

Een heel verhaal

De tweede opgave ging over een automotor, in dit geval over de afstand van het bovenste uiteinde van de drijfstang die de zuiger door de cilinder beweegt, tot de bovenkant van de cilinder. Deze afstand is afhankelijk van de onderkant van de drijfstang die vastzit op een draaiende cirkel. Een heel verhaal. Maar als je goed naar het plaatje kijkt dan zie je de onderdelen die in de formule voorkomen wel zitten (zie figuur 3). De juistheid van die formule moet je aantonen.



figuur 3

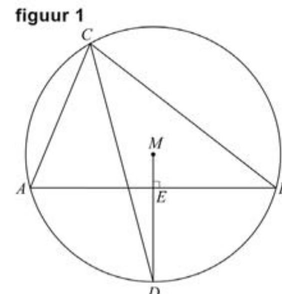
Helaas ook nu weer geen lekkere goniovergelijking, maar meteen een vraag over het verschil tussen twee formules $|s - z|$. Bovendien moet er eigenlijk met modulus gewerkt worden, wat nauwelijks aan bod is gekomen bij het oefenen. Het correctievoorschrift (CV) zegt echter: 'Als zonder expliciet gebruik van de notatie van de absolute waarde het goede antwoord gevonden wordt, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.' De grafiek van $|s - z|$ heeft twee toppen, waarbij het minimum even ver onder de x-as ligt als het maximum erboven... Voor het punt van het CV-bolletje 'Beschrijven hoe het maximum van $|s - z|$ met de GR kan worden berekend' zou de leerling daar wel iets over moeten opmerken. Ik was al blij als ze de WINDOW zo hadden ingesteld dat ze het antwoord 0,002 vonden, wat 30 procent deed.
Voor vraag 6 moest de afgeleide van z worden opgeschreven om daarmee de maximale zuigersnelheid te berekenen. Op het eerste gezicht zou je zeggen $z' = 0$ oplossen. Veel leerlingen (en ikzelf ook in eerste instantie) probeerden dit dan ook. Deze vergelijking heeft echter geen oplossingen tussen 0 en π. Maar als je even doordacht dan was z' zelf de zuigersnelheid en moest je daar het maximum van hebben. Bij deze vraag heb ik aanvankelijk voor leerlingen die niet de kettingregel hebben gebruikt 0 punten toegekend. Later heb ik voor het goed gebruiken van de afgeleide van $\cos(x) = -\sin(x)$ toch maar 1 punt toegekend.

Meetkunde: geen crime maar een ramp

Dan de eerste meetkundeopgave, zie figuur 4.

Punt M is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van de scherphoekige driehoek ABC. Op deze cirkel ligt punt D zo dat straal MD zijde AB in punt E loodrecht snijdt. Zie figuur 1. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

7 Bewijs dat CD de bissectrice van hoek ACB is.



figuur 4

Hier worden twee vragen gesteld die op het eerste gezicht weinig met elkaar te maken hebben. Maar het zou geen examen zijn als dat niet het geval was. Voor de eerste vraag kon je de stelling *loodlijn op koorde* gebruiken. Dan wat congruente driehoeken zoeken en omtrekshoeken gelijk praten via *boog en koorde* of *constante hoek*. Het lijkt erop dat de makers van het examen (deze meetkunde verdwijnt over twee jaar) gezocht hebben naar stellingen die nog nooit op het examen geweest zijn. Voor de leerlingen dus wederom geen herkenbare vraag om lekker mee te beginnen. Voor velen is meetkunde toch al een crime. Maar nu werd het een ramp. Slechts één leerling gaf het goede antwoord, meer dan de helft scoorde 0 punten.
Ze hadden natuurlijk meer hulplijntjes moeten tekenen op de uitwerkbijlage. Alleen $AM = BM = straal$ had al veel opgeleverd. Congruente driehoeken AME en BME. Dan

gelijke middelpuntshoeken leveren gelijke bijbehorende omtrekshoeken, en klaar. Hiermee omzeil je de stellingen *loodlijn op koorde* en *boog en koorde* die niet zo vaak voorkomen in de opgaven. Voor de tweede vraag moest een driehoek getekend worden. Als je de voorwaarden van de tweede vraag tekent in de figuur van de eerste vraag, dan kom je er al gauw achter hoe het zit. Kern is dat je moet snappen dat twee lijnen die allebei loodrecht staan op een zelfde lijnstuk (*AB*) evenwijdig lopen. De vierde opgave is er een in de nieuwe stijl, veel punten, zonder tussenvragen. Deze opgave ging over de stof van de laatste weken: raaklijnen aan grafieken. Ik denk dat de leerlingen al zo van slag waren dat ze hier ook niet meer aan gedacht hebben. Vier leerlingen hadden hem goed. Velen (30%) strandden al bij het punt midden tussen de toppen. Echt zorgelijk vind ik dat veel leerlingen niet doorhadden welk punt op de *y*-as tussen (0,3) en (0,-1) ligt. (Ze deden $\frac{y_{top\ boven} - y_{top\ onder}}{2}$ in plaats van $\frac{y_{top\ boven} + y_{top\ onder}}{2}$).

Goed niveau

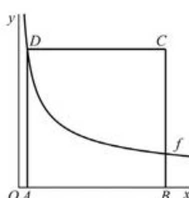
De opgave *Vierkant bij grafiek* vond ik eindelijk een opgave zoals ik die bij het niveau van een vwo wiskunde B-examen vind horen, zie figuur 5. Inhoud van een omwentelingslichaam, let op de grenzen, en een minimale waarde, dus een formule opstellen en differentiëren, dat moet kunnen. Het mag duidelijk zijn dat een aantal leerlingen door de voorgaande vragen al flink gedeprimeerd zijn geraakt. Velen herkenden niet de cilinder (met het gat). In plaats daarvan namen ze de oppervlakte van het vierkant.

Vierkant bij een grafiek

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$.

Van vierkant $ABCD$ liggen de hoekpunten A en B op de x-as en het hoekpunt D op de grafiek van f. Zie figuur 1.

figuur 1



De x-coördinaten van A en B noemen we respectievelijk a en b, met $0 < a < b$. De coördinaten van D zijn dan $(a, \frac{16}{\sqrt{a}})$.

Voor $a = 1$ ontstaat het vierkant met zijde 16.
V is het deel van dit vierkant dat zich boven de grafiek bevindt.
Vlakdeel V wordt gewenteld om de x-as.

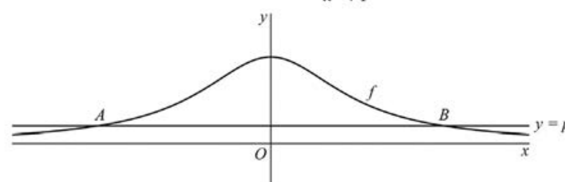
figuur 5

De volgende opgave, *Snelheid op een baan*, was ook een lekkere om je vaardigheden te laten zien. Waarom stond deze niet eerder in het examen? Ondanks alle ellende door 58% van de leerlingen goed gemaakt.
Van de vragen bij de opgave *Driehoek met dubbele hoek*, waar geprutst moest worden met hoeken, had ik er eentje al genoeg gevonden. Als de eerste niet lukt, dan slaan ze (27%) de tweede meteen maar over. Op zich vind ik beide vragen goed bij het programma passen. Er werden hier en daar best punten gescoord met *constante hoek*, *Thales* en *koordenvierhoek*. Deze opgave had mijns inziens ook eerder in het examen moeten staan.

Uitsmijter

De laatste opgave, *De kromme van Agnesi*, is een uitsmijter met een parameter, zie figuur 6.
Hier worden algebraïsche vaardigheden gevraagd.

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.



De lengte van lijnstuk AB is $2\sqrt{\frac{1}{p}-1}$.

15 Bewijs dit.

figuur 6

Leerlingen die bij de vergelijking $x^2 = \frac{1}{p} - 1$ alleen de oplossing $x = \sqrt{\frac{1}{p} - 1}$ hebben, vermelden vaak abusievelijk dat $OB = OA$, dus $AB = 2\sqrt{\frac{1}{p} - 1}$. Volgens het correctievoorschrift moet er in dat geval 'naar symmetrie verwezen' worden, maar dat moet dan toch bewezen worden, zou ik denken?

Conclusie

Het examen had een onprettige startopgave. Er moesten vaak hele grote formules in de GR worden gezet. Ik vond het aantal vragen dat met de GR moest worden opgelost veel te groot. Verder was het gehalte meetkundevragen erg hoog. Vragen waar je lekker algebraïsche vaardigheden mee kon laten zien, waren schaars. Een aantal opgaven die nu verderop in het examen stond had veel beter meer naar voren kunnen staan. De vragen 12, 10 en 11, 13 respectievelijk 14 bevatten voor de leerlingen beter herkenbare stof dan de wat gekunsteld overkomende vragen 2 t/m 8. Iedereen scoorde veel lager dan normaal. Ook de leerlingen die boven de 9 stonden.

Over de auteur

Rob van Oord is sinds 1974 werkzaam als eerstegraads docent wiskunde aan het Coenecoopcollege te Waddinxveen en is sinds 2014 met pensioen. Vorig jaar heeft hij ingevallen op Lyceum Ypenburg.
Dit jaar deed hij dat op Gymnasium Novum in Voorburg.
E-mailadres: *robvanoord@tiscali.nl*

EINDEXAMEN WISKUNDE C: EEN BESCHOUWING

Theo-Jan van de Pol

Theo-Jan van de Pol bespreekt het vwo wiskunde C-examen en de resultaten van zijn twee leerlingen. Een vergelijking met het pilotexamen geeft hoop op betere wiskunde C-tijden.

Dit eindexamenjaar hadden we bij ons op het Ichthus College twee kandidaten voor het examen wiskunde C. Ze hadden de afgelopen drie jaar tegelijk met de wiskunde A-leerlingen les, aangevuld met wat individuele vragenuren. Dat kan nog hooguit één jaar... Je hoopt dat de leerlingen op deze wijze toch goed zijn voorbereid op het examen. Met een mengeling van nieuwsgierigheid en spanning open je het vragenboekje.

Veel tekst

De eerste serie opgaven heet *Aalscholvers en vis*, net als bij het wiskunde A-examen. Er staat een grote hoeveelheid tekst en een tabel met formules, zie figuur 1.

vissoort	formule voor de lengte	formule voor het gewicht
baars	$L = -14,73 + 31,11 \cdot O$	$\log(G) = -5,605 + 3,273 \cdot \log(L)$
pos	$L = -11,31 + 22,14 \cdot O$	$\log(G) = -5,607 + 3,335 \cdot \log(L)$

In deze formules is O de gemeten otolietlengte in mm, L de lengte van de vis in mm en G het gewicht van de vis in gram.

figuur 1

Tekstueel indrukwekkend, je moet echt even goed lezen en de juiste formule gebruiken. De wiskundige vraag is erg mager. Leerlingen moeten wat getallen invullen. Maar goed, het is dan ook de instapvraag. Voor de tweede vraag moeten de leerlingen twee formules na elkaar invullen. Ik vraag me af of de eerste twee vragen wel zo geslaagd zijn. Er wordt geprobeerd aan te sluiten bij de context van het wiskunde A-examen, maar de vragen zijn anders en na twee vragen wordt feitelijk overgestapt op een andere context: *De visstand in het IJsselmeer*. Het wiskunde C-pilotexamen begint hiermee en laat mijns inziens terecht de koppeling met wiskunde A los.
De vragen die in de ‘nieuwe context’ worden gesteld, zijn prima vragen. Exponentiële groei (vraag 3), een beetje inzicht (je kunt niet meer vangen dan 100% bij vraag 4) en opletten op eenheden (vraag 5) zijn concepten die in elk wiskunde C-examen thuishoren. Hiermee sluit het eerste onderdeel af. Al met al een heel redelijk begin voor een wiskunde C-examen. Helaas denken mijn leerlingen hier anders over. Ze laten beiden de helft van de punten liggen.

Kansrekening

De tweede serie opgaven, *Sociale Psychologie*, is helemaal gelijk aan die van het examen wiskunde A. Bij opgave 6 moeten de leerlingen zich verdiepen in een experiment: de 2-back-taak. Bij dat experiment verschijnt met tussenpozen een willekeurige letter in beeld. Als deze letter gelijk is aan de letter twee stappen terug, moet een kandidaat op een linkertoets drukken en anders op een rechtertoets. Hierbij was de voorbeeldtabel uit figuur 2 afgedrukt.

letter	T	B	N	D	W	D	A	P	P	Q	F	Q	..
toets: li=links; re=rechts	..	..	re	re	re	li	re	re	re	re	re	li	..

figuur 2

Gevraagd wordt hoe groot de kans is dat een proefpersoon, die bij een 2-back-taak 200 keer een toets indrukt, meer dan 10 keer de linkertoets moet indrukken. Opmerkelijk genoeg gaat hier veel mis, blijkt zowel uit opmerkingen op het forum als ook bij de antwoorden van mijn leerlingen en bij de tweede correctie. Voor de succeskans wordt 0,5 gekozen of 0,2 (gebaseerd op de tabel) of

$\frac{1}{26} \times \frac{1}{26}$ en ook zijn er leerlingen die niet zien dat er

200 keer gedrukt wordt, maar zij nemen de eerste 200 letters waarvoor je dan 198 keer een toets moet indrukken. Bij opgave 7 wordt rechttoe rechtaan de normale verdeling teruggevraagd en bij opgave 9 moet de $\sqrt{n}$-wet worden ingezet. Wel opmerkelijk dat het vergeten van deze wet volgens het CV maar één punt mag kosten. Dan geef je dus 6 punten aan een leerling die twee keer alleen de normale verdeling gebruikt. Best veel.
Meer moeite heb ik echter met het CV bij opgave 8 en op het forum lees ik dat dit wordt herkend. De vraag van opgave 8 leest u in figuur 3 op de volgende bladzijde.

Het CV geeft voor de kans op het eerste tweetal 2 punten (ongedeeld) en voor het tweede tweetal ook. Het laatste punt wordt gegeven voor de vermenigvuldiging van beide kansen. De kansen voor de tweetallen worden in het CV berekend met combinaties. Veel leerlingen rekenen echter

Tweede experiment
In een tweede experiment was een groep van 112 proefpersonen betrokken, bestaande uit 54 mannelijke en 58 vrouwelijke willekeurig gekozen studenten. Voor dit experiment werden tweetallen gevormd.

Veronderstel dat van deze personen er steeds willekeurig twee aan elkaar gekoppeld werden, zonder erop te letten of de persoon een man of vrouw is.

5p 8 Bereken de kans dat de eerste twee tweetallen die zo gevormd werden allebei uit een man en een vrouw bestonden. Rond je antwoord af op vier decimalen.

figuur 3

niet met combinaties maar met breuken. Hierbij gaat er echter zoveel mis (met of zonder terugleggen, wel of geen rekening houden met volgorde) dat ik graag een alternatieve uitwerking in het CV had gezien met een goede puntenverdeling. Je ziet op het forum de meningen (en daarmee het gegeven aantal punten) nu te ver uit elkaar lopen. Onze leerlingen moeten kunnen rekenen op meer eenduidigheid in ons nakijken.

Meeste uitdaging

Dan het derde onderdeel, *Fietsen en energie*. Bij dit onderdeel vind ik dat het gezamenlijke gebruik van de context door wiskunde A en wiskunde C geslaagd is. De informatie is voor beide in gelijke mate nodig en sommige onderdelen zijn net iets makkelijker gemaakt. Bij opgave 10 moet een lineaire ongelijkheid worden opgelost, bij opgave 11 moeten weer formules worden gecombineerd, opnieuw door ze na elkaar in te vullen. De opgaven 12, 13 en 14 bieden wiskundig de meeste uitdaging. Als voorbeeld noem ik opgave 14, zie figuur 4.

Je zou een duatlon kunnen samenstellen waarbij voor elk onderdeel het energieverbruik voor het sporten even groot is. We gaan daarbij uit van een atleet die met een dusdanige snelheid hardloopt, dat zijn energieverbruik 1 kcal per afgelegde kilometer is. De atleet fietst met een snelheid waarbij hij 0,4 kcal per km verbruikt. De genoemde waarden voor het energieverbruik gelden steeds per kg lichaamsgewicht.

5p 14 Bereken de afstanden voor het fietsen en het hardlopen in een duatlon van in totaal 21 km waarbij het energieverbruik van deze atleet voor elk onderdeel steeds even groot is.

figuur 4

Als wiskundeleraar vind ik het jammer dat mijn beide leerlingen deze opgave oplossen door gericht te proberen. Aan de andere kant vraagt gericht proberen ook (wiskundig) inzicht in het probleem, dus vind ik het ook terecht dat hier alle punten mee te verdienen zijn, mits goed gecontroleerd. Die laatste toevoeging mis ik wel in het CV.

Sudoku en kunst

Het vierde onderwerp gaat over *Panelen van Panhuysen*, zie figuur 5.



figuur 5 Paneel van Paul Panhuysen (bewerkt)

Deze context lijkt al wat voor te sorteren op het onderwerp 'vorm en ruimte' en ook wel 'logisch redeneren' uit het nieuwe wiskunde C-programma. Omdat het wiskundige onderwerp 'combinatoriek' is, kan het wel, maar ik houd niet zo van een geleidelijke overgang naar het volgende examenprogramma. De panelen van Panhuysen zijn kunstwerken die opgebouwd worden met behulp van de structuur van een sudoku. Leerlingen moeten in opgave 17 uitleggen of voor de *vormen* van het kunstwerk dezelfde sudoku is gebruikt als voor de *kleuren*. Zo'n redenering goed opzetten valt voor mijn leerlingen niet mee. Er worden wel ware opmerkingen gemaakt, maar die leiden niet tot een sluitende conclusie. Verder waren ze bij opgave 16 in de war door de formulering '*zichtbaar* verschillende panelen'. Een leeg vakje is immers niet zichtbaar... en dat kost zomaar 2 punten. Een leerling waar ik tweede corrector van was, schreef op zijn blaadje 'Serieus? Sudoku's? Dit is toch een wiskunde-examen?'

'ALS IK KIJK NAAR HET PILOTEXAMEN, LIJKT DE KEUZE OM WISKUNDE C EEN EIGEN GEZICHT TE GEVEN EEN GOEDE.'

De laatste context is *Craps*. Het is een bekend (?) Amerikaans casinospel. De context biedt allerlei mogelijkheden voor vragen zoals 'bereken de kans dat de speler na drie keer gooien wint' of 'bereken de kans dat het spel langer duurt dan tien keer gooien', maar ook hier werpt de tekst een hoop stof op en is de wiskunde uiterst dun. Je mag toch wel iets meer vragen dan de kans op 4 gooien met twee dobbelstenen, of één kans uitrekenen in opgave 21, zie figuur 6.

tabel

winst voor de bank	€ 10	– € 10
kans		$\frac{244}{495}$

3p 21 Bereken de verwachtingswaarde van de winst voor de bank bij één spelletje. Rond je antwoord af op centen.

figuur 6

Mager examen

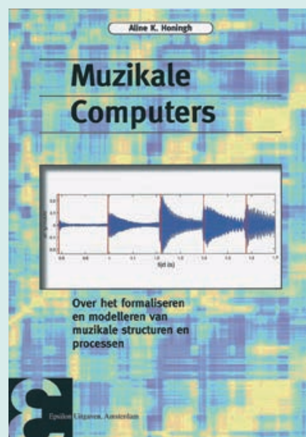
Hoewel mijn leerlingen 44 en 45 van de 77 punten halen, vind ik het wiskunde C-examen wiskundig een mager examen. Ondanks dat mijn leerlingen talig zijn, werden ze door de tekst regelmatig op het verkeerde been gezet. Dit was het eerste wat ze vertelden na het examen. Daarbij worden de al beperkte eindtermen ook nog beperkt terug-gevraagd. Algebra en Analyse (Domein Bg en Cg) vinden we vrijwel niet terug. Alleen de exponentiële groei en het invullen van formules. Dit vonden mijn leerlingen weer niet zo'n probleem. Combinatoriek en kansrekenen (Domein Eg) komt wel aan bod, maar niet de discrete verdelingen (Eg4). Ik vind dat ook een VWO wiskunde C-examen een VWO-waardig examen moet zijn, de vak-inhoud op het juiste niveau moet toetsen en recht moet doen aan wat de leerlingen in drie jaar met veel inzet leren.
Een blik op het wiskunde C-pilotexamen geeft hoop. Wiskundig lijkt het pilotexamen allemaal net wat meer inhoud te hebben. Leerlingen moeten daar aan de hand van een logistische groeiformule beredeneren wat de grenswaarde is. Ook moeten ze onderzoek doen naar lineaire en exponentiële groei. Ook de vragen rond inhoud, perspectief en logisch redeneren geven het pilot-examen net wat meer 'body'. Als ik kijk naar het pilot-examen, lijkt de keuze om wiskunde C een eigen gezicht te geven een goede. Nu maar hopen dat de leerlingen en de vervolgopleidingen dit vak ook ontdekken.

Over de auteur

Theo-Jan van de Pol is sinds augustus 1999 docent wiskunde, waarvan de afgelopen acht jaar op het Ichthus College te Veenendaal. Daarnaast is hij sinds 2007 verbonden aan de leerstoelgroep 'Wiskundige en Statistische Methoden' (Biometris) van de Wageningen UR. E-mailadres: *T.vandePol@ichthuscollege.nl*

VERSCHENEN

MUZIKALE COMPUTERS



Titel: Muzikale Computers
Ondertitel: Over het formaliseren en modelleren van muzikale structuren en processen
Auteurs: Aline K. Honingh
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam
Paperback
ISBN: 978-90-5041-155-4
Prijs: € 17,00
90 pagina's

Persbericht van de uitgever:

Wil je graag weten hoe muziekherkenning (zoals Shazam) werkt? Of een drummachine? Of ben je geïnteresseerd in de formalisatie van muzikale frases of het proces van akkoordherkenning? Door elementen in muziek, zoals toonsoort of maatsoort, te formaliseren, kunnen we tot een beter begrip en consensus hierover komen. Naast het modelleren van muziek zelf, gaat dit boek ook over het formaliseren en modelleren van processen bij muziek-waarneming. Door het formaliseren van processen als genreherkenning, meeklappen op de maat of bepalen in welke mate een melodie op een andere lijkt, kunnen we enerzijds meer begrijpen hierover, alsook modellen maken voor bijvoorbeeld muziekaanbeveling, automatische analyse of plagiaatherkenning.

EEN KIJKJE IN DE KEUKEN BIJ DE EXAMENCONSTRUCTIE

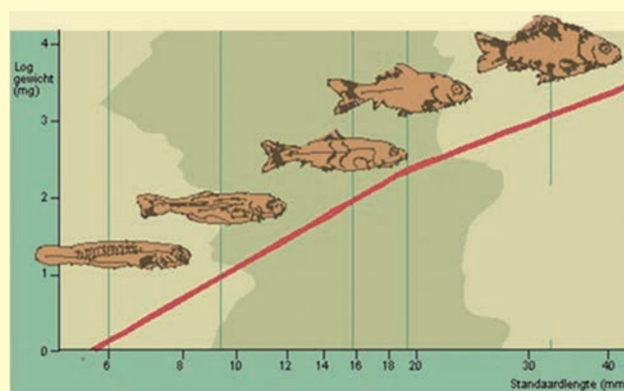
Sjoerd Crans
Jos Remijn

Examenopgaven componeren is een kunst op zich. Van een niet zelden toevallig gevonden context tot de opgave zoals die op het examen staat is een lange weg waarin veel fasen worden doorlopen. En dat alles in het grootst mogelijke geheim. Sjoerd Crans en Jos Remijn, toetsdeskundigen van Cito, reconstrueren dat proces van één opgave, *Karpers*, uit het examen havo wiskunde B 2016-1.

Examenopgaven worden bedacht door docenten, bij Cito constructeurs genoemd. Deze constructeurs zijn docenten die ook daadwerkelijk les geven in de (voor) examenklassen van het betreffende vak. Een dag per week werken zij voor Cito en zijn voor die dag door hun school vrijgesteld van hun lesgevende taak. Nieuwe constructeurs worden geworven door middel van een advertentie in de krant, op de Cito-website en in de WiskundE-brief. Voor het vak havo wiskunde B werkten tijdens het ontstaansproces van de opgave *Karpers* vier constructeurs.
In dit artikel bekijken we het traject van een examenopgave zoals dat met de constructeurs wordt doorlopen.

Idee

Een examenopgave begint met een idee. Hoe komt zo'n idee tot stand? Door rond te kijken en attent te zijn op wiskunde in de praktijk. Je ziet wat, je leest wat. Een artikel met een wiskundig tintje kan een basis zijn. De oerbron voor de opgave *Karpers* is het artikel 'De mens als foetale aap' op Kennislink.[1] Dat gaat niet over karpers, zult u zeggen. Toch wel: in het artikel komt de volgende passage voor:

> Bij een lengte van circa 19 millimeter treedt er vrij plotseling een verandering op in de groeicoëfficiënt b. Zodra karpers die lengte bereiken wordt de coëfficiënt 3,12. Die waarde van de exponent ligt dicht bij 3. Wanneer tijdens de groei het volume – en bij gelijkblijvende lichaamssamenstelling dus ook het gewicht – evenredig toeneemt met een derde macht van een lengte, spreken we van *isometrische* groei. Lengte, breedte en hoogte nemen in zo'n geval in een gelijk blijvende verhouding toe, wat betekent dat de lichaamsvorm niet verandert.
>
> Tijdens de eerste fasen van de groei is de groeicoëfficiënt niet 3,12 maar 4,47. Een volume kan niet toenemen met meer dan een derde macht van een lengtemaat, tenzij er vormveranderingen optreden. Blijkbaar veranderen breedten en hoogten tijdens larvale groei meer dan bij isometrische groei kan worden verwacht. Deze ongelijkmatige groei noemt men allometrie. De enorme vormveranderingen die tijdens de ontwikkeling van een karperlarve plaatsvinden, zijn er een voorbeeld van. Niet alleen uitwendig, maar ook in de groei van de organen treden allometrieën op. Uit het karperei ontwikkelt zich een diertje met een relatief grote kop, een nog goedgevulde dooierzak en een lange afgeplatte staart. De stroomlijnvorm die zo karakteristiek is voor een volwassen karper ontbreekt nog geheel. Maar ten gevolge van allerlei allometrieën ontwikkelt zich uit de larve een volwassen individu dat nauwelijks lijkt op zijn larvale stadia. Kortom, een volwassen individu is geen 'opgeblazen' larve.
> Allometrische groei is regel in de vroege ontwikkeling en isometrie is een uitzondering.
> De groei van een lichaam kan worden beschreven als een
>
> 
>
>
> figuur 1 Allometrie als aanpassing
>
> macht van het lichaamsgewicht maal een constante. Door logaritmische schalen te nemen verandert de grafiek van een exponentiële groeicurve ($y = a \times b$) in een rechte lijn ($\log y = \log a + b \log x$). Opgroeiende karperlarven vertonen vóór de lengte van 19 mm een groeicoëfficiënt b van 4,47 (allometrische groei), daarna 3,12 (bijna isometrisch).

Dit is nog geen kant-en-klare context voor een wiskunde-examenopgave. Er staat veel te veel informatie in (het artikel zelf is natuurlijk nog veel langer), de informatie is te wetenschappelijk en heeft ook betrekking op andere gebieden dan de wiskunde. De kunst van het vinden van een geschikte context is in eerste instantie het kunnen 'spotten' van zo'n context in een boek, tijdschrift of op internet, en het herkennen van de potentie hiervan.

Versie 0

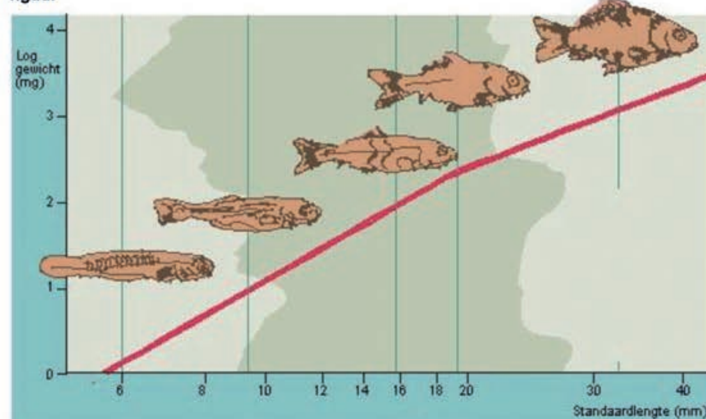
De volgende stap die de constructeur zet, is het halen van zinvolle wiskundige activiteiten voor een examenkandidaat uit deze context. Hiertoe dient de tekst geselecteerd en geherformuleerd te worden. En er moeten vragen geformuleerd worden. Het kost enig speurwerk om de juiste informatie bij elkaar te krijgen die nodig is om vragen te kunnen stellen die op het juiste niveau voor de kandidaat zijn en die bij de syllabus passen. Er moet ook voor gezorgd worden dat die vragen gebaseerd zijn op 'echte' gegevens, passend bij de realistische situatie. Bij dit laatste zou het zo moeten zijn dat de kandidaat met het gestelde probleem in de praktijk geconfronteerd zou kunnen worden. Om de problemen op het niveau van de kandidaat te brengen kan enige bewerking en selectie noodzakelijk zijn. In dit geval leidde dit tot de volgende versie 0 van de opgave *Karpers*, zie figuur 2.

figuur 2 Opgave *Karpers*, versie 0

Groei van een karper **v0**

Tijdens de ontwikkeling van een karper van larve tot volwassen exemplaar zijn twee stadia van groei te onderscheiden. In het eerste stadium verandert de karper(larve) in grote mate van vorm. Dit stadium duurt tot een lengte van ongeveer 19 mm. In het tweede stadium verandert de vorm nauwelijks. Zie de figuur.

figuur



In de figuur staat langs de horizontale as de lengte L in mm tijdens de ontwikkeling. Op deze as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt. Langs de verticale as staat de logaritme van het gewicht G in mg.

Tijdens de groei van een lichaam is het gewicht evenredig met een macht van de lengte. De groei kan dus beschreven worden met een formule van de vorm

$$G = a \cdot L^b$$

Hierin is b de zogeheten groeicoëfficiënt.

Als een lichaam tijdens de groei niet van vorm verandert, geldt in theorie $b = 3$. In het eerste stadium van de groei van een karper verandert de vorm in grote mate, voor dit stadium geldt $b \approx 4{,}47$.

Uit de figuur volgt dat voor het eerste stadium geldt $a \approx 0{,}00041$.

?p **1** Toon dit met behulp van een berekening aan.

Voor het tweede stadium geldt $a \approx 0{,}022$.

In het tweede stadium verandert de vorm van de karper nauwelijks. De groeifactor zal dus ongeveer gelijk zijn aan 3. Met behulp van de gegevens en vanwege het feit dat de formules voor het eerste en tweede stadium op elkaar aansluiten, is de groeicoëfficiënt voor het tweede stadium te berekenen.

?p **2** Bereken hoeveel procent de groeicoëfficiënt van het tweede stadium afwijkt van de theorie.

De groei in de twee stadia is ook te beschrijven met formules van de vorm $\log(G) = p + q \cdot \log(L)$.

?p **3** Bereken op algebraïsche wijze de waarden van p en q voor het eerste stadium. Rond daarna je antwoorden af op twee decimalen.

Versie 0 is vaak niet meer dan een half uitgewerkt idee. Deze versie wordt rondgestuurd naar de andere constructeurs. Zij gaan meedenken, in de hoop dat het uiteindelijk een volwaardige opgave oplevert. Een versie 0 heeft nog geen correctievoorschrift. Dat is bij de volgende versie wel verplicht, want om een opgave op waarde te kunnen schatten is het belangrijk om te zien wat er van de kandidaat verwacht wordt, en hoe dat wordt gehonoreerd en beoordeeld. Het traject tot een versie 1 speelt zich buiten het zicht van de toetsdeskundigen van Cito af, dit gaat per mail tussen de constructeurs onderling.

Versie 1

Versie 1 werd door constructeur A als volgt aangekondigd: 'Vandaag heb ik "Groei van een karper" onder het stof vandaan gehaald en hem proberen op te poetsen. Het kostte mij veel moeite om e.e.a. kloppend te krijgen met "de werkelijkheid" en ik gaf het ook al bijna op. Gelukkig vond ik een nieuwe bron waardoor ik het nog aan durf om hem in te sturen. Zelf ben ik nog steeds niet heel tevreden, dus ik verwacht dat jullie er ook het e.e.a. op aan te merken hebben, maar misschien dat iemand anders er bij versie 2 net de juiste draai aan kan geven?! Ik ben m.b.t. deze opgave nu even "leeg".' De nieuwe bron die de constructeur heeft gevonden, is het *Kennisdocument Karper* van Sportvisserij Nederland, waarin staat: 'Klein Breteler & de Laak (2003) hebben met onderstaande formule de lengte-gewichtrelatie bepaald voor karper in Nederland: G = 0,01 · $TL^{3.129}$, waarbij G = gewicht in gram en TL = totaallengte in cm. De relatie is gebaseerd op data van 8.271 vissen met een lengte van 10-94 cm.'[2] Deze gegevens zijn gebruikt in de volgende

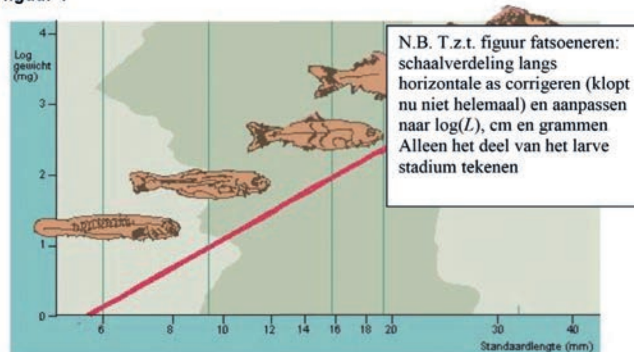
figuur 3 Opgave *Karpers*, versie 1

Groei van een karper v1

Tijdens de ontwikkeling van een karper van larve tot volwassen exemplaar zijn grofweg twee stadia van groei te onderscheiden. In het eerste stadium verandert de karperlarve in grote mate van vorm. Dit stadium duurt tot een lengte van ongeveer 19 mm.

In figuur 1 wordt de groei van een karperlarve weergegeven. Langs de horizontale as staat de logaritme van de lengte L in cm tijdens de ontwikkeling. Langs de verticale as staat de logaritme van het gewicht G in gram. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 1



4p **1** Bepaal met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage in mg nauwkeurig het gewicht van een karperlarve van 8 mm.

Tijdens beide stadia van de groei van een karper is het gewicht evenredig met een macht van de lengte. De groei kan dus beschreven worden met een formule van de vorm

$$G = a \cdot L^b$$

Hierin is L weer de lengte in cm, G is weer het gewicht in gram en b is de zogeheten groeicoëfficiënt.

Als een karper tijdens de groei niet van vorm zou veranderen, zou in theorie gelden $b = 3$. In het eerste stadium van de groei van een karper verandert de vorm in grote mate, voor dit stadium geldt $b \approx 4{,}47$.

Uit de figuur valt ook af te lezen dat een karper(larve) van 1,9 cm ongeveer 0,24 gram weegt.

3p **2** Bereken met behulp van deze gegevens a voor het eerste stadium in drie decimalen nauwkeurig.

Uit onderzoek onder gekweekte karpers tussen 10 en 94 cm in Nederland volgt de formule $G = 0{,}01 \cdot L^{3{,}129}$.

3p **3** Bereken hoeveel keer zo zwaar de grootste karper is in vergelijking tot de lichtste karper.

De formule $G = 0{,}01 \cdot L^{3{,}129}$ kan herleid worden tot een formule van de vorm $\log(G) = p + q \cdot \log(L)$.

4p **4** Bereken op algebraïsche wijze de waarden van p en q.

versie 1, zie figuur 3 (op de website is ook de ontwikkeling van het CV te volgen, bij Cito is de leus altijd: het is pas écht een opgave als er een CV bij zit).
Versie 1 wordt besproken in een vergadering van de constructiegroep. Als voorbereiding hierop wordt door de andere constructeurs schriftelijk commentaar gegeven. De toetsdeskundige en de constructeurs gebruiken dit commentaar om de bespreking voor te bereiden. Dit commentaar kan soms behoorlijk stevig zijn. Dat hoort erbij, en daar moet je als constructeur tegen kunnen. Het uitgangspunt is namelijk dat het commentaar nooit persoonlijk bedoeld is, maar dat we met z'n allen proberen een zo goed mogelijke opgave te maken. Het is natuurlijk niet leuk als jouw geesteskindje afgekraakt wordt, maar dat levert vaak wel een betere opgave op. Of er wordt geconcludeerd dat de opgave niet geschikt is. Liever dit laatste, dan een ongeschikte opgave in het examen omdat we elkaar de waarheid niet durven zeggen.

Schriftelijk commentaar

Hieronder het schriftelijke commentaar op deze versie 1:
Constructeur B: 'Het taalgebruik van de inleiding is erg officieel en sluit niet echt aan bij de belevingswereld van onze doelgroep. Liever: fase of deel i.p.v. stadium/stadia. Bijvoorbeeld: in de eerste fase spreken we over een larve. In de tweede fase spreken we over een vis, MAAR: Hier doen we weinig mee, liever weglaten. In stam vraag 2 melden dat de vorm van de jonge vis erg verandert of zo. In grote mate van vorm, klinkt ook erg plechtig en wordt weinig mee gedaan.
Graag herschrijven.
Tweede alinea, tweede zin: tijdens de ontwikkeling, weglaten.
Tekst na vraag 1 herschrijven: stadia en grote mate. Vraag 2 is wel een simpel invuloefeningetje. Hier testen we vooral de leesvaardigheid van de kandidaten. Liever de b uit laten rekenen en de informatie meer structureren, b=3 heb je hier niet nodig!
Vraag 3: grootste t.o.v. kleinste'

Constructeur C: '1e alinea 2e zin 'in grote mate' vervangen door 'sterk' o.i.d.
In de zin na de formule in de opsomming van de betekenis van de letters invoegen 'a is een constante'.
De zin 'Als een karper ...' in de 3e alinea na vraag 1 kan beter weg.
De zin hierna kan dan gewoon worden: 'In het eerste stadium van de groei van een karper geldt $b \approx 4{,}47$.'
Bij vraag 3 toevoegen: 'Rond je antwoord af op honderdtallen.'
Vier onderdelen lijkt me genoeg, dus ik zou niets meer doen met die groeicurve.

'HET IS NATUURLIJK NIET LEUK ALS JOUW GEESTESKINDJE AFGEKRAAKT WORDT, MAAR DAT LEVERT WEL EEN BETERE OPGAVE OP.'

Vraag 2 is eenvoudig. Vraag 4 vinden leerlingen altijd lastig. In het geheel een geschikte opgave.'
Constructeur D: 'In de tweede alinea na vraag 1 wordt er b = 3 gegeven. Maar verder niets met die b = 3 gedaan. Verwarrend? Bij opgave 3 bedoel je 'kleinste' ipv 'lichtste'. Verder lijkt mij dit een geschikte opgave. Vrij herkenbaar met wat ze al eens gezien hebben (hersengewicht, bomendiameter, ...).'
Het commentaar varieert dus van kleine tekstuele of wiskundige verbeteringen tot suggesties voor ingrijpende aanpassingen. Ook staan er meningen bij over de vragen. Gelukkig zegt niemand dat deze opgave niet geschikt is.

Vergadering

Dan komt de opgave in de vergadering van de constructiegroep. In deze vergadering worden altijd meerdere opgaven die onder constructie zijn besproken. Ook wordt de stand van zaken van de examens die op dat moment samengesteld worden, doorgenomen.

In de vergadering werden bij de opgave *Karpers* de volgende conclusies getrokken:
De opgave is voldoende afwijkend van de opgave *Mosselen* uit 2011-2.
Constructeur B vindt onderdelen 2 en 3 wat simpel.
Voorstel voor een extra onderdeel: de lengte wordt 2x zo groot, met welke factor verandert het gewicht.
De taal mag wat directer.
Afspraak: constructeur B gaat hiermee aan de slag.

Verdere traject

Hierna volgen nog vier versies van de opgave, die elk weer besproken worden in een vergadering van de constructiegroep. Het gaat hierbij steeds meer over details in vraagstelling en beoordeling. Deze tussenversies zijn te vinden op de website van de *Euclides.* Uiteindelijk komt de eindversie van de opgave terecht in de opgavenbank.
Een opgave blijft enige tijd in de opgavenbank zitten, totdat deze wordt uitgekozen om voor te leggen aan de vaststellingscommissie wiskunde B van het CvTE. Het voorstel is dan om de opgave op te nemen in de set opgaven die zullen worden uitgeprobeerd.
Elk jaar wordt namelijk een set nieuwe opgaven uitgeprobeerd in toetsen die worden afgenomen bij een aantal leerlingen op scholen in Nederland. Het doel van dit uitproberen is om te onderzoeken of de opgave geschikt is als examenopgave en zo ja, om psychometrische gegevens over de opgave te verzamelen.
Meer informatie over dit proces en het vervolg van de opgave bij de vaststellingscommissie staat in het *Euclides*-artikel van Algra en Limpens.[3]

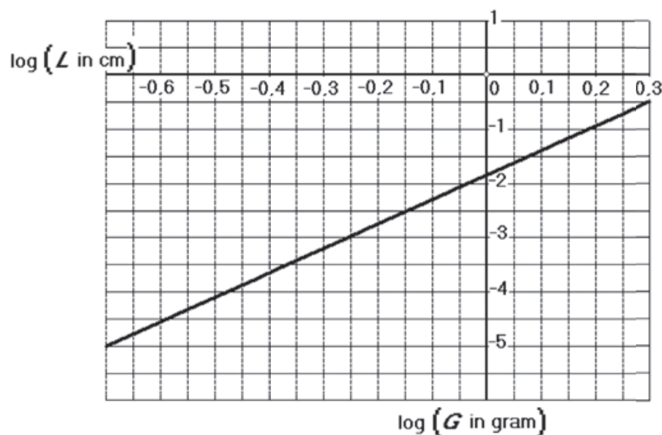
figuur 4 Opgave *Karpers*, zoals in eerste versie aan de vaststellingscommissie is voorgelegd.

Groei van een karper

In het begin van zijn leven ontwikkelt een karper zich van larve tot klein visje. Aan het einde van deze ontwikkeling heeft het visje een lengte van ongeveer 19 mm.

In onderstaande figuur wordt de groei van een karperlarve weergegeven. L is de lengte van de larve in centimeter en G is het gewicht in gram. Langs de horizontale as staat de logaritme van de lengte L en langs de verticale as staat de logaritme van het gewicht G. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur



4p **1** Bepaal met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage in milligrammen nauwkeurig het gewicht van een karperlarve van 8 millimeter.

De groei van een karperlarve kan beschreven worden met een formule van de vorm

$$G = 0{,}014 \cdot L^b$$

Hierin is L de lengte in centimeter, G is het gewicht in grammen en b een constante.

Met behulp van de figuur is te bepalen dat een karperlarve van 1,9 centimeter ongeveer 0,25 gram weegt.

4p **2** Bereken b met behulp van deze gegevens. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Voor een volwassen karper geldt de formule:

$$G = 0{,}014.L^{3{,}129} \text{ met } 10 \le L \le 94$$

Hierin is L weer de lengte in centimeter en G is het gewicht in grammen.

3p **3** Bereken hoeveel keer zo zwaar een karper van 94 cm is in vergelijking tot een karper van 10 cm. Rond je antwoord af op honderdtallen.

De formule $G = 0{,}014.L^{3{,}129}$ kan worden herleid tot een formule van de vorm

$$\log(G) = p + q \cdot \log(L).$$

4p **4** Bereken op algebraïsche wijze de waarden van p en q.

De lezer mag zelf de volgende versie van Karpers, zoals deze was in de eerste versie die aan de vaststellingscommissie is voorgelegd (figuur 4), vergelijken met de opgave zoals deze uiteindelijk in het examen havo wiskunde B van 2016 eerste tijdvak is afgenomen.

Noten

[1] http://www.kennislink.nl/publicaties/de-mens-als-foetale-aap

[2] http://www.sportvisserijnederland.nl/files/kennisdocument-karper_4552.pdf+, p. 34

[3] Algra, A. en G. Limpens (2004). Examenconstructie: een langdurig en zorgvuldig proces. Over de rol van CEVO, Citogroep en docenten bij de totstandkoming van de eindexamens. *Euclides* 80(1), p. 2-5.


vakbladeuclides.nl/921remijn

Over de auteurs

Sjoerd Crans en Jos Remijn zijn toetsdeskundigen van Cito (www.cito.nl). E-mailadressen: *sjoerd.crans@cito.nl*; *jos.remijn@cito.nl*

DOOR DE OGEN VAN EEN CONSTRUCTEUR

N.N.

Hoe ziet het werk van een constructeur van onze examens eruit? Dat kun je ze eigenlijk niet vragen. Constructeurs zijn docenten die daadwerkelijk voor de klas staan. Zij krijgen de instructie niet over dit werk te spreken met mensen in hun omgeving en zich min of meer in de anonimiteit schuil te houden. Vandaar N.N.

Augustus 2007. Ik word verwacht bij Kees Lagerwaard, de Cito-toetsdeskundige voor havo wiskunde A. Hij zal mij, nieuw lid van de constructiegroep, inwijden in de geheimen van het maken van examens. Kees verwacht mij rond een uur of elf en heet me hartelijk welkom. Er volgen bemoedigende woorden, wat summiere uitleg over bankversies, procedures en het verschil tussen p- en p'-waarden en dan is het wat Kees betreft alweer genoeg geweest. Alle informatie zal de komende maanden tijdens het werk wel op zijn plek vallen. Wij gaan naar het restaurant, een kroketje eten. Daarna mag ik naar huis. Kees verzekert me dat het wel zal gaan lukken.
Kees had het goed gezien. In de maanden en jaren daarna leerde ik veel. In het begin leerde ik vooral hoe moeilijk het is om een goede examenopgave te construeren. Wat een eisen! Het moeten bestaande, realistische contexten zijn. Actueel als het even kan en rekening houdend met de achtergrond van leerlingen en de gevoeligheden in de samenleving. Af en toe een redeneervraag, dat mag best. Uiteraard wel eentje die eenduidig is. En corrigeerbaar. Stapelsommen zijn ten strengste verboden. Maar het moet wel een doorlopend verhaal zijn, waarbij de wiskundige vragen 'als vanzelf' naar boven komen. In duidelijk en bondig Nederlands geformuleerd. Want het moet geen oefening in leesvaardigheid worden, laten we het onze dyslectische leerlingen niet onnodig moeilijk maken. Tsjongejonge, ga er maar aan staan. Alle ballen in de lucht houden tijdens de constructie, dat is voorwaar geen gemakkelijke opgave. Gelukkig hoeft een opgave niet in één keer goed te zijn. En gelukkig werken we in een team, met verschillende collega's die ieder hun eigen inbreng hebben en waarin we allemaal van elkaar leren.

Vuilniszak

In 2007 viel ik midden in de voorbereidingen voor het toenmalig nieuwe programma havo wiskunde A. We gaven op dat moment op school nog wiskunde $A_{1,2}$, maar dat ging helemaal op de schop. Wiskunde A moest het worden. Met als nieuw onderwerp algebra. Toen ik erbij kwam, was de constructiegroep al volop bezig met de eerste examens wiskunde A, die voor 2009 op stapel stonden. Ze hadden nog wel een klusje voor mij. Of ik bij het eerste tijdvak 2009 een algebravraag wilde bedenken. Het hele examen was al klaar, uitgeprobeerd en al, maar er moest nog algebra in. Ze hadden zelf ook al een beetje nagedacht maar dat had nog geen bruikbaar idee opgeleverd. Aan mij dus de taak om in een examen dat al vrijwel klaar was, binnen de reeds vastgestelde contexten, een algebra-opgave te bedenken. Pff. Ik heb een halve dag nagedacht en zag slechts één oplossing. Herkent u hem nog (zie figuur 1)? Dit was de allereerste examenvraag waarvan ik het idee had aangeleverd.



figuur 1 Voor vuilniszakken met een korte zijde van 5 dm en een lange zijde van 7,5 dm is het volume lineair afhankelijk van de knoopstrook x. De formule voor het volume van een vuilniszak is dus te schrijven in de vorm $V = p \cdot x + q$. Herleid de formule tot deze vorm. (havo wiskunde A 2009-1)

Tijd, rust en concentratie

Na verloop van tijd ging het steeds beter. Ik leerde veel en was blij met de tijd die je krijgt voor de constructie. Brainstormen over een nieuwe context, je gedachten laten gaan over wiskundige vragen die je erbij zou kunnen stellen, dat vraagt tijd, rust en concentratie.
In het onderwijs is het vaak hectisch. Lessen moeten worden voorbereid, mentorleerlingen vragen je aandacht, team-, sectie- en afdelingsvergaderingen komen altijd op het verkeerde moment. En dan moeten er ook nog toetsen en repetities worden gemaakt. Wie kent niet de druk van het moment, dat er nog snel een toets 'in elkaar gedraaid' moet worden?
Als lid van de constructiegroep heb ik gelukkig nooit tijdsdruk ervaren. Eén dag per week helemaal vrijge-

steld zijn, dat geeft rust en ruimte om allerlei creatieve ideeën te laten opborrelen. Want examenopgaven maken heeft wel iets van een creatief proces. Wat dus ook kan mislukken. In mijn mapje concepten heb ik al jaren een beginnetje van een opgave staan over een onderzoek naar zweet. In het onderzoek werd gekeken naar de hoeveelheid zweet die mensen uitscheiden. De uitkomsten van dat onderzoek zouden door het leger gebruikt kunnen worden bij de vraag hoeveel water militairen mee moeten nemen naar woestijnachtig gebied. Er stond zelfs een formule bij. Toch heb ik er nooit iets van kunnen maken. De formule was ingewikkeld, iets met e-machten die niet eenvoudig om te schrijven waren naar havo A-niveau. En de overige informatie leidde tot een hele lap tekst, zonder dat ik er een zinvolle vraag bij wist te bedenken. Dan is het prettig dat zelfs daar tijd voor is, dat het af en toe vastloopt of niets concreets oplevert.

Geschikte bronnen

Wat zijn dan geschikte bronnen, die kunnen dienen als context in een wiskunde A-examen? Tja, dat is niet zomaar te zeggen. Een paar algemene regels zijn er wel. Een bron moet 'rijk' zijn aan wiskunde en niet alleen maar losse getallen bevatten waar je wat aan kunt rekenen. Plat gezegd: je moet meer kunnen vragen dan alleen een procentje. Dat betekent dat tabellen met gegevens zonder enig verband al vrij snel afvallen.
De tabel met de tarieven van de Westerscheldetunnel was weer wel een goede bron. Die tabel kwam bij het openslaan van het regionale dagblad onverwacht op mijn pad, zie figuur 2. Zo kan het gaan. Dat je, zonder dat je specifiek op zoek bent, op een geschikte bron stuit. Direct zag ik de mogelijkheid om hier een examenopgave omheen te construeren. Je kunt een prettige instapvraag bedenken, je kunt lineaire formules laten opstellen, je kunt iets doen met de btw enzovoort. De verschillende categorieën bieden de mogelijkheid om vragen te stellen zonder dat er sprake is van stapeling. Dan duurt het nog wel een aantal uren totdat een eerste versie op papier staat, maar de bron is rijk genoeg.

Tarieven per **enkele passage** inclusief 21% BTW geldig voor 2013

Categorie		Standaard	t-tag	Veelgebruikerstarief
①	personenauto's zonder aanhanger	€ 5,00	€ 3,80	€ 3,05
②	personenauto's met aanhanger	€ 7,45	€ 5,70	€ 4,55
③	kleine (bestel)bussen, kleine vrachtwagens	€18,20	€13,90	€11,15
④	grote vrachtwagens	€25,00	€19,00	€15,25
⑤	motoren	€ 2,50	€ 2,50	€ 2,00

figuur 2 Examenopgave havo wiskunde A 2016-1

Bronnen uit de natuurkundehoek doen het ook goed, omdat daar vaak een formule achter zit. En als je onverwacht op een formule met meerdere variabelen stuit, ja, dan heb je het eurekagevoel echt te pakken. Inleiding schrijven, iets vragen over de formule, een beetje intersecten en ten slotte met het geven van één variabele de formule laten herleiden tot een vorm als $W = a{\cdot}H + b$. Voilà, daar is de eerste versie.

Feedback

Binnen de constructiegroep wordt die eerste versie vervolgens besproken. Dat levert vaak huiswerk op voor een tweede versie: vragen moeten worden aangepast, zinsneden moeten worden verduidelijkt enzovoort. Wat je zelf als een geschikte formulering zag, daar kunnen anderen totaal anders over denken. En bij nader inzien hebben ze vaak nog gelijk ook...
Daarna besluit de vaststellingscommissie of het een goede examenopgave kan worden en volgt nog een aantal ronden waarin commentaar besproken en verwerkt wordt. En dan is het – hopelijk – goed. Toch blijft er altijd de angst: hebben we iets over het hoofd gezien? Nadat het examen afgenomen is, bieden de regionale en landelijke examenbesprekingen een laatste gelegenheid voor feedback. Uiteraard ben ik bij deze besprekingen als gewone docent aanwezig, zonder kenbaar te maken dat ik heb meegewerkt aan het examen. En ook al zou je verwachten dat alle examenopgaven helemaal goed zijn, toch hoor ik daar af en toe behartigenswaardige zaken. Dan gaat het weliswaar niet om fouten in het examen, maar meer om iets als een onhandige formulering. Neem bijvoorbeeld de volgende zinnetjes uit de opgave *Datingshow* van een aantal jaren geleden: 'Maaike is bang dat alle televisiekijkers zien dat ze door niemand wordt gekozen. Ze vraagt zich af hoe groot de kans is dat minstens één van de drie jongens haar kiest. Bereken deze kans.' (havo wiskunde A 2009-1) Een van de aanwezigen merkte op dat de formulering je op het verkeerde been zet. Je denkt na de eerste zin dat de vraag wordt: 'Bereken de kans dat ze door niemand wordt gekozen', maar er wordt juist naar het complement gevraagd. 'Helder', denk ik dan, 'die neem ik mee'.

Taalgebruik

Ik noemde het al, er moet gelet worden op het juiste taalgebruik. Van havoleerlingen mag op leesgebied best iets verwacht worden, maar het is en blijft een wiskunde-examen. Dus niet te moeilijk formuleren a.u.b. Het spanningsveld zit hem er dan in dat je aan de ene kant leerlingen ter wille wilt zijn door eenvoudig taalgebruik, terwijl je aan de andere kant recht wilt doen aan de context. Ik vond het zelf nogal meevallen met de woorden die we gebruikten, maar gedurende het proces werden we regelmatig op de vingers getikt. 'Preventief zout strooien', dat is echt te ingewikkeld taalgebruik. Oké, passen we aan. 'Een perceel aardappels', die woordencombinatie is veel te moeilijk. Prima, dat wordt dan 'een stuk akkerland'. Maar toen een collega in een economisch getinte opgave het woord 'penetratiegraad' gebruikte, werd dat zonder problemen geaccepteerd. Ik viel van mijn stoel van verbazing. Het werd zelfs nog vet gedrukt ook!

Statistiek

Inmiddels zijn we bezig met het nieuwe programma, waarin de kansrekening vervangen is door statistiek. Dat betekent inlezen in een nieuw soort bronnen. En dat is best leuk eigenlijk. De gekste dingen worden onderzocht. Zo leer je nog eens wat. Dat van die hommels, die in een ruimte geplaatst worden met allerlei bloemen waar nectar in verstopt zit (zie figuur 3), dat was echt interessant om te lezen.

Hommels



Er is onderzoek gedaan naar het gedrag van hommels. De onderzoekers vroegen zich hierbij af hoe efficiënt hommels van bloem naar bloem vliegen om nectar te vinden.
Tijdens het onderzoek werd steeds een hommel in een afgesloten ruimte geplaatst. In deze ruimte bevonden zich zes kunstmatige bloemen met daarin een nectarachtige suikeroplossing. Telkens als de hommel vanuit het hommelnest op zoek ging naar voedsel, werd na terugkeer op het nest genoteerd welke route hij die vlucht volgde, welke afstand werd afgelegd en hoelang de vlucht duurde.

figuur 3 Voorbeeldexamenopgave havo wiskunde A 2015

Maar dan de vragen. Het valt nog niet mee om er geschikte vragen bij te bedenken. De vernieuwingscommissie cTWO heeft ingezet op kwalitatief redeneren. Dus geen boxplots of frequentiepolygonen laten tekenen, maar begrijpen, interpreteren en redeneren.
In zeker opzicht is deze keuze te begrijpen. Leerlingen van nu worden op allerlei gebieden geconfronteerd met een brij aan informatie. Dan is het een goede zaak dat we hen leren hoe ze die informatie moeten interpreteren en welke conclusies ze al dan niet kunnen trekken.
Alleen, hoe gaan we dat toetsen in het examen? Interpreteren van grafische representaties, dat gaat nog wel. Maar kwalitatief redeneren, wat voor vragen moeten dat worden? Neem bijvoorbeeld de vuistregels op het formuleblad voor de grootte van een verschil van twee groepen. Het lijkt erop dat we leerlingen eerst vragen om een verschil te kwantificeren met behulp van Cramer's φ, V_{cp} of de effectgrootte. Inzicht in de gegeven formules is daarbij niet vereist. Vervolgens vragen we hen om dat verschil aan de hand van een gegeven lijstje te kwalificeren als groot, middelmatig of gering. Is dat kwalitatief redeneren? Ik zie het niet. Wellicht moet dit onderdeel van het nieuwe programma nog wat bezinken.

Afronding

Ik ga afronden. Wat heb ik in de afgelopen jaren geleerd en ervaren? Laat ik de belangrijkste dingen noemen.
Vanaf het begin heb ik het als heel prettig ervaren om samen met vakcollega's bezig te zijn met wiskunde. Het is ontzettend waardevol om er met elkaar over te spreken hoe je de eindtermen van de syllabus vertaalt naar een goede examenopgave. Daarbij was het ook een verrijking voor mijn eigen werk als docent. Het maken van een goede toets of repetitie, dat kost me niet zo heel veel moeite meer. Daarom vind ik het erg jammer dat mijn taak als constructeur nu afloopt.
O ja, nog iets. Afronden. Ik geloof dat ik daar vroeger wel een mening over had. Inmiddels ben ik erachter gekomen dat de problematiek rond het afronden zéér gecompliceerd is. Iedere context kent zijn specifieke eigenheid en elke situatie roept wel vragen over afronding op. Hoe vaak we daar al niet over gesproken hebben! Het is me de afgelopen jaren wel duidelijk geworden dat het probleem met het afronden niet eenvoudig op te lossen is.
Mijn termijn zit erop. Ik geef het stokje door aan mijn opvolger en ik hoop dat hij of zij het werk met net zo veel plezier zal oppakken als ik de afgelopen jaren heb gedaan.

Over de auteur

N.N. heeft vanaf augustus 2007 meegewerkt aan de constructie van havo wiskunde A-examens. Nu de maximale termijn van negen jaar erop zit, blikt N.N. terug op het werk als constructiegroepslid.

MEDEDELING

VROUWEN en wiskunde

REÜNIE VROUWEN EN WISKUNDE

Op *zaterdag 1 oktober 2016* organiseert de werkgroep Vrouwen & Wiskunde een feestelijke reünie in Utrecht omdat het 35 jaar geleden is dat de werkgroep werd opgericht, in 1981 dus.
Degenen van wie een actueel mailadres bekend was hebben inmiddels een uitnodiging ontvangen.
Maar omdat het adressenbestand incompleet is zijn we nog naarstig op zoek naar namen en e-mailadressen van meer vrouwen (oud-leden) die we hiervoor kunnen uitnodigen.
Bent u of kent u zo iemand? Stuur een mail naar *mpkollenveld@casema.nl* en u ontvangt nadere informatie over aanmelding en programma.
Jeanne Breeman en Marian Kollenveld

KWALITEIT VAN HET MODELLEERONDERWIJS IN NEDERLANDSE SCHOOLBOEKEN

Bert Zwaneveld
Jacob Perrenet

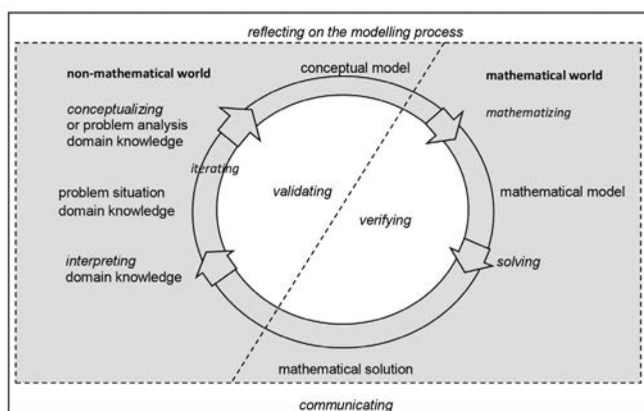
Modelleren is een van de wiskundige denkactiviteiten en een van de vaardigheden voor de 21e eeuw. Bert Zwaneveld en Jacob Perrenet onderzochten op welke wijze modelleren in schoolboeken aan de orde komt.

Op de conferentie van de *International Community of Teachers of Modelling and Application*, Nottingham juli 2015, hebben we verslag gedaan van ons onderzoek naar de mate waarin er in het Nederlandse wiskundeonderwijs nu *echt* gemodelleerd wordt. We hebben daarbij de invalshoek gebruikt van het modelleeronderwijs aan de Technische Universiteit Eindhoven (TU/e). We denken dat die invalshoek ook voor de bovenbouw van havo en vwo bruikbaar is. Mede aanleiding voor ons onderzoek was een van de algemene eindtermen van het eindexamenprogramma wiskunde A vwo (2008): Subdomein A2: Onderzoeksvaardigheden (inmiddels omgedoopt tot Profielspecifieke vaardigheden):
'De kandidaat kan een probleemsituatie in wiskundige termen analyseren, oplossen en het resultaat naar de betrokken context terugvertalen.'[1]
In deze eindterm is de kern 'wiskundig modelleren' te herkennen. We hebben ons onderzoek beperkt tot wiskunde A in het vwo. In elk van de drie bovenbouwdelen *Getal & Ruimte* en *Moderne Wiskunde* hebben we elke tweede opgave met een niet-wiskundige probleemsituatie geanalyseerd.

Wiskundig modelleren

Modelleren moet ergens toe leiden, met andere woorden: het moet een modelleerdoel hebben.[2] Van Overveld en Borghuis noemen in hun eerstejaars basiscursus aan de TU/e de volgende modelleerdoelen:[3] *verklaren* (waarom Mars rood ziet werd ooit verklaard met het model dat Mars staat voor de oorlogsgod), *voorspellen* (wat gaat er gebeuren en wanneer?), *comprimeren* (Kepler bracht de vele data van Tycho Brahe over de positie van planeten terug tot drie wetten), *inspireren*, *communiceren* (hoe lichten we een specifiek publiek in?), *unificeren* (Newtons algemene zwaartekrachtswet unificeert de baan van de planeten en het vallen van een appel van een boom), *abstraheren*, *analyseren* (wat is hier aan de hand?), *verifiëren*, *exploreren*, *beslissen*, *optimaliseren*, *specificeren* (ontwerpeisen opstellen voor een artefact), *realiseren* (het ontwikkelen en produceren van een artefact) en *besturen* (het implementeren van een artefact). Uiteraard zijn in het wiskundeonderwijs van de vwo-bovenbouw lang niet al deze doelen relevant.

Om de doelen te bereiken bestaat modelleren uit modelleeractiviteiten. De genoemde eindterm A2 komt overeen met de activiteiten: *conceptualiseren*, *mathematiseren*, *oplossen* en *interpreteren*. Uit ons onderzoek van 2012 waarbij we studenten en docenten hebben gevraagd hun eigen modelleercyclus te schetsen, blijken nog andere activiteiten cruciaal: *valideren* (klopt het model?), *verifiëren* (is de wiskundige oplossing correct?), *itereren* (heen en weer gaan tussen de verschillende modelleeractiviteiten ter verbetering van het model), *communiceren* (van het model en de resultaten) en *reflecteren* (op modelleerproces en modelleerproduct) (zie figuur 1).[4]
Wij beschouwen de volgende criteria als essentieel voor echt wiskundig modelleren: aanwezigheid van een modelleerdoel en het doorlopen van een groot deel van de modelleercyclus. Onze onderzoeksvraag is: *In welke mate is modelleren in de twee genoemde lesmethoden echt wiskundig modelleren?*



figuur 1 Modelleercyclus volgens Perrenet en Zwaneveld (2012)

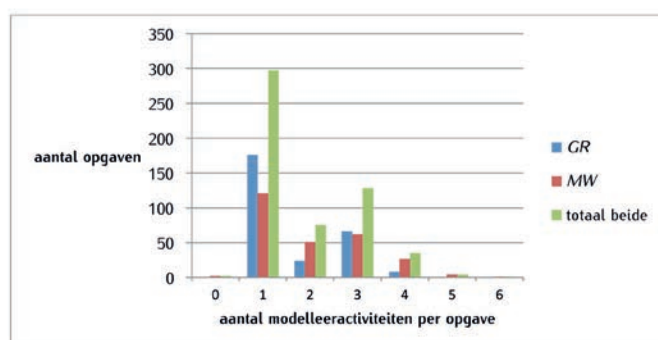
Resultaten: modelleeractiviteiten

We hebben 542 opgaven geanalyseerd, 274 opgaven uit *Getal & Ruimte* en 268 opgaven uit *Moderne Wiskunde*. In die opgaven hebben we in totaal 992 modelleeractiviteiten aangetroffen, waarbij sommige opgaven meer dan één modelleeractiviteit hebben (zie tabel 1).

	Getal en Ruimte	Moderne Wiskunde	beide
aantal geanalyseerde opgaven	**274**	**268**	**542**
conceptualiseren	75	97	172
mathematiseren	73	96	169
oplossen	268	258	526
interpreteren	25	71	96
verifiëren	2	7	9
valideren	3	10	13
reflecteren	0	3	3
itereren	2	1	3
communiceren	0	1	1
totaal aantal gevraagde modelleeractiviteiten	448	544	992

tabel 1 Modelleeractiviteiten in *Getal en Ruimte* en *Moderne Wiskunde*

Figuur 2 toont hoeveel verschillende modelleeractiviteiten er per opgave in de 542 geanalyseerde opgaven zijn, bijvoorbeeld ongeveer 130 opgaven met drie modelleeractiviteiten, iets meer dan 65 in *Getal & Ruimte*, bijna 65 in *Moderne Wiskunde*.



figuur 2 Aantal opgaven met 0-6 verschillende modelleeractiviteiten (van 542 opgaven in totaal)

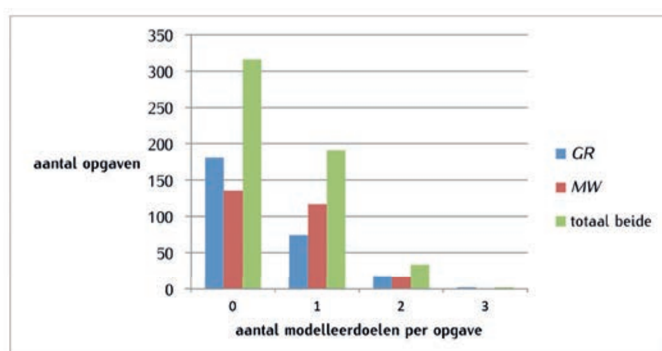
Resultaten: modelleerdoelen

In de 542 geanalyseerde opgaven hebben we ook de modelleerdoelen geïnventariseerd: 265 opgaven in beide methoden samen hebben minstens één modelleerdoel, in *Getal & Ruimte* 116 van 274 opgaven, in *Moderne Wiskunde* 149 van 268 opgaven. Slechts zes doelen komen voor (zie tabel 2).

	Getal en Ruimte	Moderne Wiskunde	beide
aantal opgaven	**274**	**268**	**542**
verklaren	31	39	70
voorspellen wanneer	9	7	16
voorspellen wat	3	5	8
analyseren	28	53	81
optimaliseren	31	16	47
besluiten	14	29	43
totaal aantal aangetroffen modelleerdoelen	116	149	265

tabel 2 Modelleerdoelen in *Getal en Ruimte* en *Moderne Wiskunde*

Figuur 3 laat zien hoeveel modelleerdoelen er per opgave in de 542 geanalyseerde opgaven zijn, bijvoorbeeld bijna 200 opgaven met precies één modelleerdoel, ruim 100 opgaven in *Moderne Wiskunde* en ongeveer 75 in *Getal & Ruimte*.



figuur 3 Aantal opgaven met 0-3 verschillende modelleerdoelen

Conclusies

Ten eerste is in verreweg de meeste opgaven *oplossen* de belangrijkste activiteit (zie tabel 1), d.w.z. het toepassen van wiskundige begrippen en technieken. Daarna komen

conceptualiseren en *mathematiseren* in ruim 30% van de opgaven. *Interpreteren* van het wiskundige resultaat in termen van het probleem gebeurt in nog geen 20% van de opgaven, in *Moderne Wiskunde* overigens beduidend meer dan in *Getal & Ruimte*. Alle overige modelleeractiviteiten komen nauwelijks voor.
Figuur 2 laat zien dat ongeveer 70% van de opgaven één of twee modelleeractiviteiten hebben; ongeveer 30% heeft er drie of vier; vijf of zes komen nauwelijks voor.
Ten tweede, m.b.t. de modelleerdoelen toont tabel 2 dat *analyseren* (ongeveer 15%) en *verklaren* (ongeveer 13%) het meest voorkomen. Daarna komen *optimaliseren* en *beslissen*, met ieder bijna 10%. *Analyseren* en *beslissen* komen vaker in *Moderne Wiskunde* voor, *optimaliseren* meer in *Getal & Ruimte*. De twee vormen van *voorspellen* halen nog geen 3%. De andere modelleerdoelen zijn afwezig. Uit figuur 3 concluderen we dat ongeveer 60% van de 542 opgaven geen modelleerdoel heeft.
Ons antwoord op de onderzoeksvraag, 'In welke mate is modelleren in de twee genoemde methoden echt wiskundig modelleren?', luidt: de meeste opgaven voldoen niet aan de criteria dat het gaat om modelleeractiviteiten bij een probleem met een modelleerdoel. Dit is vergelijkbaar met wat Vos vond in de Nederlandse eindexamens.[5]
Echt modelleren hebben we gedefinieerd als het voorkomen van meer dan vier modelleeractiviteiten bij minstens één modelleerdoel. In de methodes zien we vaak 'modelleren in het klein', wat we definiëren als het voorkomen van twee tot vier activiteiten bij minstens één modelleerdoel. Er is een modelleerdoel, er zijn modelleeractiviteiten, maar meestal is het model gegeven, of zeer voor de hand liggend (een lineaire of een exponentiële functie), conceptualiseren ontbreekt. 'Modelleren in het klein' komt beduidend vaker voor in *Moderne Wiskunde*.
Heel vaak komt *oplossen* voor in beide methoden (tabel 1), terwijl er nauwelijks echt modelleren plaatsvindt. Oefenen van wiskundige vaardigheden is kennelijk het belangrijkst. Niet alle opgaven met een niet-wiskundig probleem kunnen ook tot echt modelleren leiden, want nieuwe wiskundige begrippen en technieken moeten inderdaad geoefend worden. De auteurs moeten echter de balans zien te vinden tussen het onderwijzen van wiskundige begrippen en technieken zoals vermeld in het examenprogramma en het onderwijzen van wiskundig modelleren. Dit sluit aan bij wat Vos heeft opgemerkt dat modelleren op school twee soorten doelen heeft: een modelleerdoel en een onderwijsdoel, dat is afgeleid uit het examenprogramma.[6]

Aanbeveling

Wij denken dat het modelleeronderwijs in de methoden als volgt verbeterd kan worden (*Moderne Wiskunde* heeft een aanzet in deze richting). Begin elk hoofdstuk met een modelleerprobleem, waarmee de leerlingen alvast kunnen ervaren welke begrippen en technieken aan de orde komen. Presenteer aan het eind van dat hoofdstuk, als onderdeel van een serie gemengde opgaven, problemen specifiek gericht op echt modelleren: de leerlingen kunnen dan leren dat het modelleerdoel richting geeft aan het modelleerproces, en ze ervaren de relevantie van de verschillende modelleeractiviteiten. In het tussenliggende deel van het hoofdstuk leren de leerlingen de begrippen en technieken, ze oefenen deze en passen ze toe in opgaven met een wiskundig én een niet-wiskundig probleem: modelleren in het klein.

Noten

[1] Cevo (2008). *Wiskunde A VWO Syllabus centraal examen*. Utrecht: Cevo.
[2] Spandaw, J., & Zwaneveld, B. (2012). Modelleren, van werkelijkheid naar wiskunde en weer terug. In P. Drijvers, A. van Streun, B. Zwaneveld (red.), *Handboek wiskundedidactiek*. Utrecht: Epsilon Uitgaven.
[3] Overveld, K. van, en Borghuis, T. (2013). *'From Problems to Numbers and Back'. Lecture Notes to 'A Discipline-neutral Introduction to Mathematical Modelling'*. Eindhoven: Eindhoven University of Technology.
[4] Perrenet, J.C., & Zwaneveld, B. (2012). The Many Faces of the Modelling Cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(6), 3-21.
[5] Vos, P. (2013). Assessment of Modelling in Mathematics Examination Papers: Ready-Made Models and Reproductive Mathematising. In G.A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, J.P. Brown (Eds.), *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice* (pp. 479-488). New York: Springer.
[6] Vos, P. (2011). What is 'authentic' in the teaching and learning of mathematical modelling? In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, G. Stilman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling (ICTMA14)*. New York: Springer.

Over de auteurs

Bert Zwaneveld is emeritus hoogleraar professionalisering van de leraar in het bijzonder in het wiskundeonderwijs en informaticaonderwijs van de Open Universiteit.
E-mailadres: *G.Zwaneveld@uu.nl*
Jacob Perrenet is buitenlid van de examencommissie van de lerarenopleiding van de TU/e. Hij heeft gevarieerd didactisch en onderwijskundig onderzoek verricht bij exacte vakken. E-mailadres: *j.c.perrenet@tue.nl*

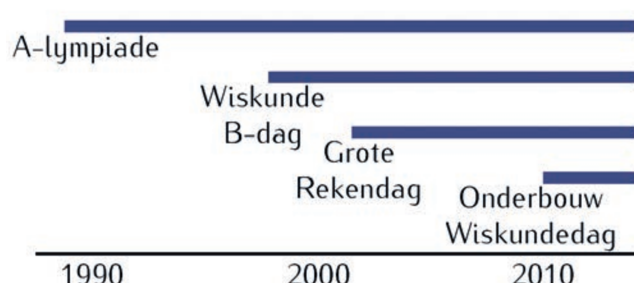
HET FIZIER GERICHT OP...

WISKUNDEWEDSTRIJDEN VOOR TEAMS

Monica Wijers

In FIzier belichten medewerkers van het Freudenthal Instituut een thema uit hun werk en slaan hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. In recente nummers van *Euclides* heeft u kunnen lezen over de wiskunde B-dag en de Onderbouw-WiskundeDag.[1] In deze FIzier brengt Monica Wijers de door het Freudenthal Instituut georganiseerde reken-wiskundeactiviteiten voor teams in hun samenhang onder de aandacht en plaatst ze in historisch perspectief.





figuur 1 Tijdbalk

A-lympiade

In het schooljaar 1989-1990 werd de eerste experimentele versie van de Wiskunde A-lympiade gehouden. De directe aanleiding voor het ontstaan van deze wedstrijd was de ontwikkeling en implementatie van het nieuwe vak wiskunde A, dat in 1985 werd ingevoerd. Een belangrijk doel van dit vak is 'dat leerlingen leren aan de werkelijkheid ontleende problemen te doorgronden en op te lossen met behulp van de in het leerplan genoemde wiskundige hulpmiddelen'.[2] Hierbij zijn wiskundige vaardigheden nodig als mathematiseren, het beoordelen van de waarde van wiskundig getinte (re)presentaties, communiceren met en over wiskunde, het werken met wiskundige modellen en het beoordelen van de relevantie van die modellen. Daarnaast vraagt het meer generieke hogere orde vaardigheden, zoals probleem oplossen, onderzoeken, kritisch denken, argumenteren en creativiteit, die nu ook actueel zijn onder de naam '21e-eeuwse vaardigheden'.[3] Ten slotte is ook samenwerken belangrijk, het gaat hier immers steeds om wiskunde voor teams. Dit type procesvaardigheden bleek lastig te toetsen in het centraal schriftelijk examen. Jan de Lange, van 1990-2006 hoogleraar directeur van (de voorloper van) het Freudenthal Instituut, bedacht daarom een nieuwe toetsvorm in de vorm van een wedstrijd voor teams, waarin een open, authentiek, probleem centraal staat: de Wiskunde A-lympiade.[4] Na 27 jaar en ondanks diverse leerplanwijzigingen is deze wedstrijd nog steeds een vast onderdeel in de jaarplanning op meer dan honderd scholen. Leerlingen met wiskunde A, uit 5/6 vwo of 4/5 havo, werken een hele dag op school aan de opdracht. De werkstukken worden beoordeeld door een wiskundedocent van de eigen school en het beste of de twee beste werkstukken kunnen worden ingestuurd voor de wedstrijd.[5] Niet alle deelnemende scholen sturen overigens werkstukken in. Regelmatig wordt de opdracht uitsluitend gebruikt als praktische opdracht of als onderdeel van het schoolexamen. De ingestuurde werkstukken worden opnieuw beoordeeld, nu door een docent van een andere deelnemende school. Deze docenten leggen elk zeven tot tien werkstukken op volgorde en uit deze rangorde komen de winnende teams naar voren. Deze teams strijden vervolgens in een internationale finale tegen elkaar en tegen een aantal teams uit Duitsland, Denemarken, Iran, Sint Maarten en Aruba en waarschijnlijk in de nabije toekomst ook Japan. Hieruit blijkt dat aandacht voor dit type vaardigheden niet uitsluitend een Nederlandse aangelegenheid is.[6]



figuur 2 De Antilliaanse teams met hun begeleiders Ricky Quant (Colegio Arubano, midden) en Iwan Blankendael (Milton Peters College, Sint Maarten, rechts)

Finaleweekend

Over het finaleweekend van de A-lympiade wordt nooit zo veel gepubliceerd, terwijl het voor de commissie een van de hoogtepunten op de jaarlijkse wiskundeagenda is. De deelnemende teams werken gedurende twee dagen aan een nieuwe finaleopdracht, die nog opener van karakter is dan de opdracht uit de voorronde. Het finaleweekend dankt zijn speciale karakter mede aan het feit dat het in een vakantiepark in Garderen gehouden wordt. Ieder team heeft zijn eigen huisje waarin twee dagen gewerkt en overnacht wordt. Alle maaltijden en het alcoholvrije happy hour 's avonds zijn in het bijbehorende hotel, waar de integratie tussen de teams uit de verschillende landen plaatsvindt. Het finaleweekend wordt afgesloten met een bijeenkomst waar de teams hun werk presenteren aan een publiek van docenten en ouders. Een jury, gevormd door de Nederlandse Wiskunde A-lympiade commissie die de wedstrijd organiseert en ook de opdrachten ontwerpt, bepaalt vervolgens de winnaars.



figuur 3 Groepsfoto van de A-lympiade finale deelnemers

Wiskunde B-dag

Geïnspireerd door het succes van de A-lympiade en vanwege vernieuwingen in het vak wiskunde B is in 1999 de eerste Wiskunde B-dag georganiseerd.[7] Inmiddels is deze wiskundewedstrijd voor teams al bijna vijftien jaar net zo populair als de Wiskunde A-lympiade. Zoals de naam al aangeeft is de Wiskunde B-dag bedoeld voor leerlingen met wiskunde B. Verder is de opzet vergelijkbaar met die van de Wiskunde A-lympiade. Er zijn een paar opvallende verschillen: de opdrachten hebben niet altijd betrekking op een probleem ontleend aan de werkelijkheid, het kan ook gaan om een probleem uit de wiskunde zelf. Vaak maken leerlingen kennis met een voor hen nieuw wiskundig onderwerp en diepen ze een stukje daarvan uit. Verder bestaat de Wiskunde B-dag uit één ronde en is er geen aparte finale. De werkstukken die door de docenten als beste uit de poules naar voren zijn gekomen, worden samen opnieuw beoordeeld door de jury, die net als bij de A-lympiade bestaat uit leden van de commissie, dit geval de Wiskunde B-dag commissie.

OnderbouwWiskundeDag

Om leerlingen in de onderbouw voor te bereiden op het type opdrachten en de werkwijze zoals die in de Wiskunde A-lympiade en de Wiskunde B-dag gehanteerd worden, is in 2012 de OnderbouwWiskundeDag (OWD) ingevoerd voor teams van derdeklassers uit havo/vwo.[8] Het is tevens een concrete invulling van de behoefte onder wiskundedocenten om in de onderbouw meer aandacht te besteden aan 'wiskundige denkactiviteiten'. In *Euclides* 91-2 stond een uitgebreid verslag van de OnderbouwWiskundeDag van 2015.[9]
De leerlingen werkten dat jaar een hele schooldag in teams aan de opdracht 'vissen en erwten' waarin ze de vangst-terugvangstmethode voor het bepalen van een onbekende populatiegrootte onderzochten.

Grote RekenDag

Tot nu toe hebben we het uitsluitend gehad over het voortgezet onderwijs. In het basisonderwijs bestaat een vergelijkbare activiteit, namelijk de Grote RekenDag (GRD).[10] Dit is een jaarlijkse activiteit van een hele dag waarin alle groepen op de basisschool werken aan opdrachten rond hetzelfde reken-wiskundige thema. De GRD wordt sinds 2003 door het Freudenthal Instituut georganiseerd, tegenwoordig in samenwerking met uitgeverij Malmberg. De GRD is geen wedstrijd en heeft tot doel leerlingen in het basisonderwijs te laten ervaren dat rekenen-wiskunde meer is dan rijtjes sommen maken.

Aanbeveling

De vaardigheden waarop een beroep wordt gedaan in deze wiskundewedstrijden voor teams zijn niet alleen van belang voor het ontwikkelen van het wiskundig denken, ze worden ook als steeds belangrijker gezien voor het vervolgonderwijs en het functioneren in de maatschappij. Met de wiskundewedstrijden voor teams is tegenwoordig een mooie doorgaande lijn mogelijk van klas 3 naar de bovenbouw, met een opstap in het basisonderwijs in de vorm van de Grote Rekendag. We willen alle basisscholen dan ook stimuleren om mee te doen aan de GRD en alle wiskundesecties in Nederland om de wiskundewedstrijden op de agenda te zetten, ervaringen uit te wisselen en ze in samenhang aan te bieden aan de leerlingen.

Noten

[1] Tak, S. (2015). Het FIzier gericht op .... *Euclides* 90(6), p. 21 en Haan, D. de, Jonker, V., Wijers, M. en Doorman, M. (2013). Pauzes op school. *Euclides* 89(3), p. 7-9.

[2] Boertien, H. e.a. (1988). *Wiskunde A doelgericht toetsen. Leerdoelen en voorbeeldopgaven verzorgd door het Cito.* Groningen: Wolters Noordhoff, p.12. En: Van Streun, A. (2014). *Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten.* Enschede: SLO.

[3] http://www.fisme.science.uu.nl/wiki/index.php/21ste_eeuwse_vaardigheden

[4] Hoogland, K. en Wijers, M. (red) (1995). *Vijf jaar Wiskunde A-lympiade.* Utrecht: Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht. En: Haan, D. de en Wijers, M. (red). (1999). *Tien jaar Wiskunde A-lympiade.* Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.

[5] Het aantal werkstukken dat ingestuurd mag worden is afhankelijk van het aantal deelnemende teams op een school. Zie: http://www.uu.nl/onderwijs/wiskunde-a-lympiade/meedoen

[6] Een recent initiatief is The International Mathematical Modeling Challenge (http://www.immchallenge.org/). Nederland deed voorjaar 2015 mee aan de pilot.

[7] http://www.uu.nl/onderwijs/wiskunde-b-dag

[8] www.fi.uu.nl/nl/onderbouwwiskundedag

[9] Wijers, M (2015). Vissen en Erwten. OnderbouwWiskundeDag 2015. *Euclides 91(2),* p. 25-27.

[10] http://groterekendag.nl/ en http://www.fisme.science.uu.nl/wiki/index.php/Grote_Rekendag

Over de auteur

Monica Wijers is werkzaam bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht. E-mail: *M.Wijers@uu.nl*

VASTGEROEST

EXAMENPERIKELEN

Ab van der Roest

De NVvW organiseert jaarlijks de cursus 'Hoe kijk je een examen na'. Ab van der Roest is een van de cursusleiders en doet daar vooral de naam van zijn column geen eer aan...

'Het is weer klaar', verzucht ik. De examens zijn nagekeken. Elke keer weer een spannende bezigheid. Wat presteren *mijn* leerlingen. Let op het woordje 'mijn'. De leerlingen zijn dit jaar, zeker het laatste jaar een beetje van mij geworden. Daarom is het nakijken van een examen anders dan het nakijken van een andere toets. Het is erop of eronder.

Als ik weer terugkijk verbaast het me weer dat het nakijken van wiskunde geen exacte bezigheid is. De wereld om me heen wordt door de computer steeds exacter, maar de mensen nauwelijks. Als ik een wachtwoord met kleine letter invoer terwijl het een hoofdletter moet zijn, dan krijg ik geen toegang. Het moet exact kloppen. Maar als ik de gebruikte taal bij *WhatsApp* zie, dan wordt die alleen maar slordiger. Wiskunde is een exact vak, daar is iedereen het wel over eens, maar het maken en nakijken van examenopgaven is niet zo exact. Ik zal dat proberen te illustreren met een aantal opgaven uit de havo-examens. Eerst een voorbeeld uit wiskunde B, zie figuur 1.

Lijn k en de grafiek van f hebben nog een ander punt gemeenschappelijk.

3p 5 Bereken in twee decimalen nauwkeurig de x-coördinaat van dit punt.

figuur 1

Duidelijke opdracht en mijn leerlingen weten wel hoe ze dat aan moeten pakken. Het correctievoorschrift is ook volledig duidelijk, zie figuur 2:

5 maximumscore 3

- De vergelijking $\sqrt{-3x+6} = -\frac{7}{4}x + \frac{7}{2}$ moet worden opgelost (voor $x \neq 2$) 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden (voor $x \neq 2$) 1
- $x \approx 1,02$ 1

figuur 2

Maar bijna al mijn leerlingen beschrijven hoe de vergelijking opgelost moet worden met de GR en verdienen het punt dat bij het eerste bolletje hoort dus niet. Je

zou zelfs kunnen zeggen dat ze helemaal geen punten verdienen, want dat eerste punt is bedoeld voor leerlingen die goed beginnen en verdwalen in de algebra: kwadrateren aan beide kanten en dubbelproduct vergeten, of het kwadrateren van breuken verkeerd doen. Als een leerling helemaal fout begint, dan heeft hij geen recht op punten, ook al staat er nog wel iets goeds.
Het tweede voorbeeld komt uit wiskunde A en werd mij verteld door een collega. We herkenden in zijn voorbeeld precies hetzelfde als in het bovenstaande voorbeeld.
De opgave luidt, zie figuur 3:

3p **5** Bereken de kans dat bij de eerste 15 worpen hoogstens 2 keer 'raaf' wordt gegooid.

figuur 3

En het CV zegt, zie figuur 4:

5 maximumscore 3

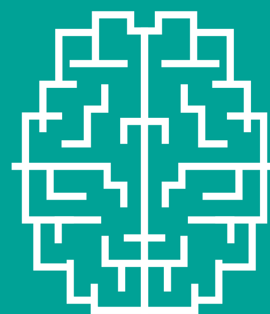
- Het aantal keren X dat 'raaf' gegooid wordt, is binomiaal verdeeld met $n = 15$ en $p = \frac{1}{6}$ 1
- Beschrijven hoe $P(X \leq 2)$ berekend kan worden 1
- Het antwoord: 0,53 (of 53%) (of nauwkeuriger) 1

figuur 4

Ook duidelijk. Vraag en antwoord, je kunt er niets van zeggen. Maar wat schrijven de leerlingen op en hoeveel punten mag je dan geven? Bijna alle leerlingen schrijven op:
binomcdf(15, $\frac{1}{6}$, 2) = 0,53 en gaan naar de volgende opgave. Is de vraag dan correct beantwoord? Het eerste bolletje staat er niet en kan dus niet beloond worden.
Beide voorbeelden hebben met *exact* te maken. Bij het nakijken zijn we opeens niet zo exact meer. We leren het de leerlingen goed aan, maar die zijn slordig met noteren. Deze slordigheid accepteren we niet bij de toetsen, maar op het examen opeens wel. 'Iedereen doet het en ik wil mijn leerlingen niet tekort doen', is het meest gehoorde motief.
Misschien dat het CvTE eens een brief uit moet laten gaan, waarin uitgelegd wordt dat wiskunde een exact vak is. Een te toetsen onderdeel van wiskunde is dan ook het *exact formuleren* en *volledig opschrijven*. Dat betekent dat als de eerste bolletjes bij deze voorbeelden niet vermeld zijn, dat de leerlingen dan geen punten krijgen, omdat ze verkeerd begonnen zijn. Ik denk dat de leerlingen dan heel snel leren exact te formuleren.

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal. Dit schooljaar vertoeft hij voor een jaar in China en zal hij ons van daaruit berichten.
E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*



Lieke de Rooij
Wobien Doyer

PUZZEL 92-1

WANNEER ZIJN VEELVOUDEN VAN PRONIKS PRONIKS?

Een pronikgetal of kortweg pronik P is een getal van de vorm $P = p(p + 1)$, waarbij p een geheel positief getal is. P is dus het dubbele van een driehoeksgetal $p(p + 1) / 2$.
Deze puzzel is grotendeels gebaseerd op een idee van Frits Göbel. De vraag die hij stelde was:
Voor welke factoren f bestaan er proniks P en Q, zodanig dat geldt: $f \cdot P = Q$. Dus $f \cdot p(p + 1) = q(q + 1)$.
Dan blijkt dat dat niet voor elke f het geval is.
De vraag van Frits is niet met een simpele formule te beantwoorden. Wel zijn er bepaalde waarden van f waarvoor we kunnen aantonen dat er al of geen P en Q bestaan die aan de voorwaarde voldoen. Vrij evidente voorbeelden zijn: a) f is een driehoeksgetal, b) f is een pronik plus of min 1, c) f is zelf een pronik.

Opgave 1 - Toon aan dat er bij de voorbeelden a, b en c proniks P en Q bestaan waarvoor geldt: $f \cdot P = Q$. Tip: toon aan dat het product van twee opeenvolgende proniks weer een pronik is.

We kunnen ook onderzoeken voor welke proniks P er waarden van f bestaan met weer $f \cdot P = Q$. Voor $P = 2$ is dat eenvoudig: f is een driehoeksgetal en voldoet aan de formule $f = k(k + 1) / 2$. Ook voor $P = 6$ bestaan er waarden van f waarbij $f \cdot P = Q$.

Opgave 2 - Aan welke formule(s) voldoet f als $P = 6$?

Tekenen we een rechthoek met zijden p en $p + 1$, dan lijkt dat voor niet te kleine p bijna een vierkant, ofwel een pronik is een 'bijna kwadraat'. Maar rekenkundig gezien is dat tegenstrijdig, want de afstanden van een pronik tot

de twee dichtstbijzijnde kwadraten zijn helemaal niet zo klein.

Opgave 3a - Bepaal de afstanden op de getallenlijn van een pronik $P = p(p + 1)$ tot de twee dichtstbijzijnde kwadraten en ook tot de twee dichtstbijzijnde proniks Q, alles uitgedrukt in p.
Opgave 3b - Bepaal ook de afstanden van een kwadraat k^2 tot de twee dichtstbijzijnde proniks, uitgedrukt in k.

We bekijken hoe het zit als f een kwadraat is. Tip: gebruik de resultaten van opgave 3.

Opgave 4a - Bewijs dat als $f = 9$ of $f = 25$, beide een relatief klein oneven kwadraat, er geen proniks P en Q bestaan zodanig dat $f \cdot P = Q$.
Opgave 4b - Toon aan dat er voor $f = 2^2 = 4$ geen oplossingen zijn.

Frits maakte een tabel met waarden w, waarbij er proniks P en Q bestaan met $w^2 \cdot P = Q$ en dus oplossingen voor $f = w^2$. We geven hier een beginnetje van die tabel met de getallen w. Zo geldt voor $p = 3$ bijvoorbeeld: $(3 \cdot 4) \cdot 195^2 = 675 \cdot 676 = Q$. De kwadraten van de getallen w in de eerste rij zijn driehoeksgetallen.
De wortels van kwadratische driehoeksgetallen zijn o.a. recursief te berekenen met: $u(n) = 6 \cdot u(n - 1) - u(n - 2)$. Dat levert dus de eerste rij van de tabel van Frits op.

p	0	1	2	3	4
1	1	6	35	204	1189
2	1	10	99	980	9701
3	1	14	195	2716	37829
4	1	18	323	5796	104005

Opgave 5a - Als controle: bepaal q voor $p = 4$ in kolom $k = 4$, dus $Q = 4 \cdot 5 \cdot 104005^2 = q(q + 1)$.
Opgave 5b - Bepaal de formules om direct de getallen in kolommen 1 en 2 te berekenen, beide als functie van p.
Opgave 5c - Bewijs dat voor de getallen w uit kolommen 1 en 2 inderdaad geldt dat $P \cdot w^2 = Q$.
Opgave 5d - Bepaal hoe je (recursief) het getal in kolom k en rij p berekent.

Wij beschikken over een bewijs dat alle getallen uit de tabel (ook als je de tabel voortzet m.b.v. de in opgave 5 bedoelde formules) voldoen. Extra uitdaging voor de liefhebbers: kunt u dat bewijs leveren?

Twee vragen die overblijven (en daarop weten wij het antwoord ook niet, maar we hebben vooralsnog geen voorbeelden):
a) Zijn er, behalve de kwadraten van de getallen uit de (voortgezette) tabel, nog meer kwadratische waarden $f = w^2$ die (minstens) één oplossing hebben?
b) Zijn er niet-kwadratische waarden van f die géén oplossing hebben?

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kunt u mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk. Er zijn weer 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij uw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. En u hoeft helemaal niet alle vragen te beantwoorden om in te zenden en zo uiteindelijk toch bovenaan de ladder te komen! Inzendingen moeten uiterlijk op 10 oktober 2016 binnen zijn.

Op de website vindt u de uitwerkingen van puzzels 91-6 en spoedig ook die van 91-7. Vanaf deze *Euclides* zullen de uitwerkingen drie weken na het sluiten van de inzendingstermijn op de website verschijnen, inclusief de volledige ladderstand.


vakbladeuclides.nl/921puzzel

LADDERSTAND
Top-10 van de ladderstand na puzzel 91-6 is:

Naam	**Punten**
K. Vugs	201
J. Verbakel	188
H. Linders	163
H. Klein	159
L. Pos	151
A. Grünefeld	120
J. Guichelaar	93
K. van der Straaten	78
J. Remijn	63
L. Cizkova	61

We feliciteren Kees Vugs van harte met de ladderprijs.

JAARVERGADERING/STUDIEDAG 2016

TWEEDE UITNODIGING

Kees Garst

Dit is de tweede uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 2016 van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op **zaterdag 5 november 2016**.
Aanvang: 10.00 uur
Sluiting: 16.00 uur
Plaats: Ichthus College, Vondellaan 4, 3906 EA Veenendaal.

Agenda

10.00-11.00 uur – **Jaarvergadering**

1. Opening door de voorzitter, de heer S. Garst
2. Jaarrede van de voorzitter
3. Notulen van de jaarvergadering 2015 (zie het volgende nummer van *Euclides*)
4. Jaarverslagen 2015/2016 van de NVvW en van *Euclides*
5. Jaarrekening en balans 2015/2016, verslag kascommissie, decharge van de penningmeester, vaststelling contributie en benoeming nieuwe kascommissie.
6. Bestuursverkiezing. De bestuursleden Douwe van der Kooi en Marianne Lambriex treden af en stellen zich niet herkiesbaar. Het bestuur draagt mevrouw Desiree van den Bogaart voor als bestuurslid.
7. Tot 28 dagen na het verschijnen van deze uitnodiging kunnen bestuurskandidaten schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door ten minste vijf leden. (e-mailadres: secretaris@nvvw.nl)
8. Rondvraag. Leden die een vraag in de rondvraag willen stellen, wordt verzocht deze vraag voor aanvang van de vergadering in te dienen bij de secretaris.
9. Sluiting van de jaarvergadering.

Programma studiedag

11.00 – 11.15	Inleiding op de studiedag
11.15 – 12.00	Plenaire lezing, door Theo van den Bogaart
12.00 – 12.15	Koffie/thee
12.15 – 13.15	Workshopronde 1A/lunch en markt
13.15 – 14.15	Workshopronde 1B/lunch en markt
14.15 – 14.30	Wisseltijd
14.30 – 15.30	Workshopronde 2
15.30 – 16.00	Plenaire voordracht door Marjolein Kool
16.00	Afsluiting

De indeling van de studiedag is gewijzigd ten opzichte van vorige jaren om de deelnemers meer gelegenheid te geven de markt te bezoeken. Iedereen volgt een workshop in ronde 1A óf in ronde 1B, zodat er tijd is voor lunch en marktbezoek.

Themagedeelte van de studiedag:

Grenze(n)loze wiskunde

Wiskunde speelt zich natuurlijk niet alleen af binnen de muren van een lokaal. Tijdens deze studiedag onderzoeken we de grenzen van ons wiskundeonderwijs en dan vooral wat aan de andere kant van die grenzen gebeurt. Daarbij kunt u bijvoorbeeld denken aan landsgrenzen en dan rijzen vragen als: Hoe is daar de discussie rond tussendoelen, eindtermen en didactiek? Wat kunnen we van elkaar en van andere culturen leren? We staan echter niet alleen stil bij geografische grenzen, maar ook bij vakgrenzen. We vinden dat wiskunde een algemeen vormende rol heeft, ondersteunend is voor andere vakken (het is toch handig als je iets kunt uitrekenen) en van belang is voor vervolg-opleidingen en beroepen. Maar houden we wel voldoende rekening met al deze doelen die buiten de grenzen van de wiskunde zelf liggen? Hoe vaak overlegt u met uw collega's van natuurkunde of economie? Ook de wiskunde van grenzeloosheid zal niet ontbreken tijdens deze studiedag. Daarbij kunt u denken aan onderwerpen als limieten, het begrip oneindig, reële getallen en hun didac-



tiek. Op deze studiedag bieden wij ruimte aan al deze aspecten van de grenze(n)loze wiskunde. Op dit moment zijn we bezig een gevarieerd en interessant programma voor u samen te stellen. De omschrijvingen van de workshops worden, net als vorige jaren, op de site van de NVvW gepresenteerd. Verantwoordelijk voor de inhoud van dit programmaonderdeel zijn Lidy Wesker-Elzinga (l.wesker@nvvw.nl) en Michiel Doorman (m.doorman@nvvw.nl).

LIO-dag
Al enige jaren is de LIO-dag een succesvolle traditie geworden: een speciaal programma voor de studenten van de lerarenopleidingen, met name de lio'ers. De lio's krijgen in september via hun opleider meer informatie.

Nieuwe leden
De studiedag is een uitstekende gelegenheid voor het bestuur om persoonlijk kennis te maken met de nieuwe leden. Dat vindt plaats met een drankje en een praatje tijdens de lunchpauze. Daarvoor nodigen we de nieuwe leden van harte uit voor de jaarvergadering/studiedag. In de loop van oktober ontvangen zij hiervoor een persoonlijke uitnodiging via de mail.

Kosten
De studiedag is gratis voor leden.
Niet-leden zijn welkom tegen betaling van een bijdrage in de kosten van € 80,00. Hiermee zijn zij, als ze daarvoor belangstelling hebben, tevens gratis lid van de vereniging tot 1 augustus 2017, inclusief alle faciliteiten, waaronder zeven nummers van de lopende jaargang van *Euclides*, en mogelijkheid tot deelname aan de verenigingswerkgroepen. Ook studenten zijn welkom, zij betalen € 40,00 (mits ze niet ouder zijn dan 27 jaar). Wie een lunch bestelt, betaalt daarvoor € 10,00.
Leden: maak (nog) eens reclame voor de vereniging en breng een collega-niet-lid mee!

Aanmelding
Aanmelden kan vanaf half september, tot **21 oktober 2016**.
Voor de organisatie is het van belang dat u zich op tijd aanmeldt.
Ook dit jaar gaat de aanmelding weer geheel digitaal via de site van de vereniging. Daarop staat het volledige programma, inclusief de workshops waar u een keuze uit kunt maken. Het voor u geldende bedrag kunt u aflezen uit de volgende tabel. Het aanmeldingsformulier leidt u door de vragen en geeft ook aan hoe u kunt betalen.

	Zonder lunch	Met lunch
Lid	gratis	€ 10,00
Niet-lid	€ 80,00	€ 90,00
Student (niet ouder dan 27 jaar en niet lid)	€ 40,00	€ 50,00

De plaatsing in werkgroepen gaat op volgorde van binnenkomst en vol = vol.
Zoals vorig jaar wordt de indeling een paar dagen voor de studiedag op de site gepubliceerd; aan het begin van de studiedag ontvangt u een badge met uw plaatsingsgegevens.

Markt
Naast alle workshops is er ook een uitgebreide markt waar u uw hart kunt ophalen aan boeken, rekenmachines, spellen, wiskunst en alle wiskundemethodes. Er is zowel een commercieel als een niet-commercieel deel. Verantwoordelijk voor deze markt is Ruud Jongeling (e-mailadres: *rj.jongeling@kpnmail.nl*)

Certificaat
De NVvW heeft de mogelijkheid om nascholingscertificaten uit te reiken, die u kunt gebruiken voor www.registerleraar.nl. Wilt u een certificaat ontvangen, vermeld dan bij uw aanmelding ook uw voorletters en uw geboortedatum. Het certificaat wordt u na afloop van de studiedag digitaal toegestuurd.

Informatie
Verantwoordelijk voor de organisatie en contactpersoon van deze dag is Heleen van der Ree (e-mailadres: *hoofdbureau@nvvw.nl*).

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Joke Verbeek, secretaris
Henk Rozenhart, voorzitter

Inzenden bijdragen
Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Swier Garst, Molenstraat 4, 3255 AN Oude Tonge
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 80,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 50,00
- studentleden (tot 27 jaar) en gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 60,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2016

za 17/9
UTRECHT
Symposium Geschiedenis Wiskundeonderwijs
Organisatie Werkgroep WGRWO van de NNvW

za 5/11
VEENENDAAL
Jaarvergadering/Studiedag NVvW
Organisatie NVvW

vr 11/11
EINDHOVEN
Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

vr 18/11
LANDELIJK
voorronde A-lympiade / Wiskunde B-dag
Organisatie Freudenthal Instituut

di 22/11
ZWOLLE
Conferentie Aansluiting PO-vmbo rekenen en wiskunde
Organisatie NVvW, NVORWO en SLO.

2017

23/1 t/m 2/2
LANDELIJK
Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

vr 3/2 za 4/2
NOORDWIJKERHOUT
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie Freudenthal Instituut

wo 8/2
LANDELIJK
OnderbouwWiskundeDag
Organisatie Freudenthal Instituut

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 92

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
2	1 november 2016	29 augustus 2016
3	15 december 2016	17 oktober 2016
4	31 januari 2017	21 november 2016
5	21 maart 2017	9 januari 2017
6	9 mei 2017	6 maart 2017
7	27 juni 2017	1 mei 2017